Az autó hurkon való áthaladásának kritikus pontja a pálya legfelső pontja. Ha itt a nyomóerő éppen nullára csökken, akkor még nem válik el az autó a pályától. A körmozgás feltétele, hogy a testre ható erők eredője létrehozza a centripetális gyorsulást. Ha a játékautó sebessége a pálya legfelső pontjában $v_1$, akkor határesetben (amikor a test még *éppen* nem válik el a kör alakú pályától):

$$mg = m\frac{v_1^2}{r}, \qquad \text{tehát} \qquad v_1^2 = rg.$$

A folyamat során a disszipatív erők hatása elhanyagolható, így a mechanikai energia megmarad.

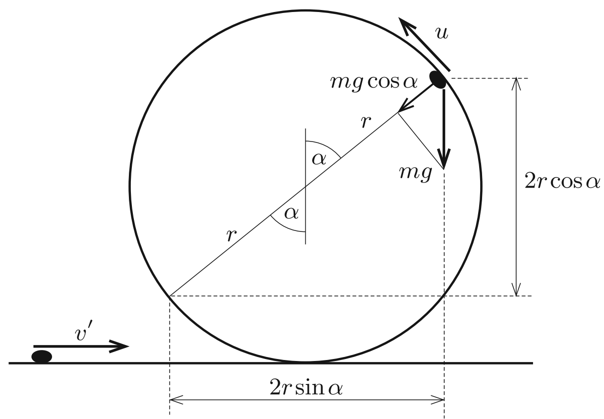
$$\frac{1}{2}mv^2 = 2mgr + \frac{1}{2}mv_1^2 = 2mgr + \frac{1}{2}mgr = \frac{5}{2}mgr,$$

vagyis

$$v = \sqrt{5rg}\,.$$

Az autó a körmozgás második negyedében tud leválni a pályájáról (előtte – nem elegendően nagy kezdősebességnél – csak visszacsúszna a körvíven). Legyen a leváláskor a játékautó sebessége $u$, a hozzá húzott sugár függőlegessel bezárt szöge $\alpha$ (lásd az *ábrát*). Ekkor még éppen körpályán halad (a pálya nyomóereje már éppen nullára csökkent), így a mozgásegyenlet sugár irányú komponense:

$$mg\cos\alpha = m\frac{u^2}{r}, \qquad \text{vagyis} \qquad u^2 = rg\cos\alpha.$$




A szemközti pontba való becsapódásáig mozgása ferde hajítás.
Vízszintesen:

$$2r\sin\alpha = u_x t = ut\cos\alpha, \qquad \text{azaz} \qquad t = \frac{2r\sin\alpha}{u\cos\alpha}.$$

Függőlegesen:

$$2r\cos\alpha = \frac{g}{2}t^2 - ut\sin\alpha.$$

A $t$-re és $u^2$-re kapott kifejezések behelyettesítésével, majd $2r$-rel egyszerűsítve kapjuk:

$$\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0.$$

Innen (a trigonometrikus Pitagorasz-tételt kihasználva):

$$\cos^4\alpha + \cos^2\alpha - \cos^4\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 0, \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

tehát

$$\alpha = 45^\circ.$$

Az energiamegmaradás törvénye szerint:

$$\frac{1}{2}mv'^2 = (1+\cos\alpha)mgr + \frac{1}{2}mu^2,$$

$$v'^2 = \left(2+\sqrt{2}\right)rg + rg\frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

$$v' = \sqrt{\left(2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)rg},$$

és végül a keresett arány:

$$\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{2}{5}+\frac{3\sqrt{2}}{10}}\approx 0{,}91.$$

*Horváth Anikó* (Szeged, Radnóti M. Kís. Gimn., 11. évf.)