Belátjuk, hogy ha $\left[x+\sqrt{x}\right]=a_i$, akkor $a_{i-1}=x$. Az x -re igaz a rekurzív feltétel, továbbá $y>x$-re $\left[y+\sqrt{y}\right]>\left[x+\sqrt{x}\right]$ (a lineáris rész 1-gyel nő, a gyökös rész szigorúan monoton nő), $y<x$-re $\left[y+\sqrt{y}\right]<\left[x+\sqrt{x}\right]$, tehát x az egyetlen lehetőség: a sorozat bármelyik eleme tehát egyértelműen meghatározza a korábbiakat.

Így megkeresve a számokat, a sorozat korábbi, 2019 előtti elemei sorrendben: 1805, 1847, 1889, 1932, 1975, 2019, melyek egyike sem négyzetszám (gyökeik megközelítő értéke rendre: 42,4853; 42,9767; 43,4626; 43,9545; 44,441; 44,9333). Mivel $1764+\sqrt{1764}>1805$, $1763+\sqrt{1763}<1805$, valóban nincs korábbi eleme a sorozatnak. Így a korábbi tagok között nincs négyzetszám.

Megmutatjuk, hogy ha van egy négyzetszám a sorozatban, akkor a sorozat egy alkalmas későbbi eleme is négyzetszám, tehát végtelen sok négyzetszám van a sorozatban. Pontosabban: Ha $a_i=b^2$, akkor $a_{i+2b+1}=(2b)^2$. Ugyanis a sorozat következő három eleme rendre $a_{i+1}=b^2+b$, $a_{i+2}=b^2+2b$, $a_{i+3}=b^2+3b$ lesz (hiszen $b^2+\sqrt{b^2}=b^2+b$, $b^2<b^2+b<b^2+2b<b^2+2b+1=(b+1)^2$, és így b^2+b és b^2+2b gyökének egész része is b). Azaz $a_{i+3}=(b+1)^2+b-1$. A c-re vonatkozó indukcióval belátjuk, hogy $a_{i+1+2c}=(b+c)^2+b-c$, ha $0<c<b+1$. Ez $c=1$-re igaz; tegyük fel, hogy $a_{i+1+2c}=(b+c)^2+b-c$. Ekkor

$$a_{i+1+2c+1}=(b+c)^2+b-c+b+c=(b+c)^2+2b$$

és

$$a_{i+1+2c+2}=a_{i+1+2(c+1)}=(b+c)^2+2b+b+c=(b+c+1)^2+b-(c+1)$$

(hiszen $(b+c)^2+b-c<(b+c)^2+2b<(b+c)^2+2b+2c+1=(b+c+1)^2$). Tehát az állítás teljesül $(c+1)$-re is. Helyettesítsünk be $c=b$-t, ezzel megkapjuk a fenti állítást.

A sorozat elemei 2019 után: 2019, 2063, 2108, 2153, 2199, 2245, 2292, 2339, 2387, 2435, 2484, 2533, 2583, 2633, 2684, 2735, 2787, 2839, 2892, 2945, 2999, 3053, 3108, 3163, 3219, 3275, 3332, 3389, 3447, 3505, 3564, 3623, 3683, 3743, 3804, 3865, 3927, 3989, 4052, 4115, 4179, 4243, 4308, 4373, 4439, 4505, 4572, 4639, 4707, 4775, 4844, 4913, 4983, 5053, 5124, 5195, 5267, 5339, 5412, 5485, 5559, 5633, 5708, 5783, 5859, 5935, 6012, 6089, 6167, 6245, 6324, 6403, 6483, 6563, 6644, 6725, 6807, 6889.

Mivel $6889=83^2$, a fentiek szerint végtelen sok négyzetszám van a sorozatban.

Németh Márton (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 9. évf.)