I. megoldás. Ha $n \leq 2$, akkor nyilván $k = 1$, hiszen a gráfban nem lehet irányított kör.

Tegyük fel ezután, hogy $n \geq 3$. Ekkor $k \geq 2$, mivel például egy irányított n hosszú kör megfelelő színezéséhez legalább két szín szükséges. Megmutatjuk, hogy $k = 2$ szín már mindig elegendő. Számozzuk meg a gráf csúcsait az $1, 2, \ldots, n$ számokkal, és egy i csúcsból egy j csúcsba mutató irányított él legyen piros, ha $i < j$, és legyen kék, ha $i > j$. Ekkor, ha az $i_1, i_2, \ldots, i_t$ csúcsok ebben a sorrendben egy egyszínű irányított kör csúcsai lennének, akkor vagy $i_1 < i_2 < \ldots < i_t < i_1$-nek, vagy $i_1 > i_2 > \ldots > i_t > i_1$-nek kellene teljesülnie, azonban világos, hogy ezek egyike sem állhat fenn. Ezzel mutattunk olyan színezést 2 színnel, ami megfelelő.

Tehát $n = 1, 2$ esetén $k = 1$, $n \geq 3$ esetén pedig $k = 2$.

II. megoldás. Az n szerinti indukcióval igazoljuk, hogy $n \geq 3$ esetén $k = 2$. A kezdeti feltételek nyilvánvalóan teljesülnek. Tegyük fel, hogy az állítás minden n csúcsú gráfra igaz, és tekintsünk egy $n+1$ csúcsú gráfot. Válasszuk ki ennek egyik, P csúcsát. A P csúcsot és a vele szomszédos éleket elhagyva, a kapott n csúcsú gráf az indukciós feltevés szerint megfelelően kiszínezhető két színnel. A P-vel szomszédos élek közül pedig a P-be menőket színezzük pirosra, a P-ből indulókat pedig kékre. Így az egész gráf színezése megfelelő: ha egy irányított kör nem megy át P-n, akkor az indukciós feltevés szerint nem lehet egyszínű. Ha pedig átmegy P-n, akkor tartalmaz egy P-be menő és egy P-ből induló élt is, és ezek különböző színűek.

Argay Zsolt (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

III. megoldás. Egy szín biztosan nem lesz elég, hiszen lehet a gráfban irányított kör. Megmutatjuk, hogy egyébként pedig két szín elég lesz. Kezdjük el az egyik színnel (piros) beszínezni az éleket, és legyen a színezésünk olyan értelemben maximális, hogy jelenleg még nincs piros irányított kör, de ha bármelyik további élt színeznénk pirosra, akkor már lenne. Színezzük ezért a többi élt kékre. Megmutatjuk, hogy ekkor nincs kék irányított kör. Tegyük fel indirekt, hogy van kék irányított kör: $B_1, B_2, \ldots, B_t, B_1$. A B_iB_{i+1} él nem lévén piros, a B_{i+1}-et B_i -vel irányított piros út köti össze (minden $i = 1, \ldots, t$-re). Legyen ez az út: $B_{i+1}A_1^iA_2^i \ldots A_{k_i}^iB_i$. Tekintsük a következő piros irányított utakat:

$$\big(B_1A_1^tA_2^t \ldots A_{k_t}^tB_t\big),\ \big(B_tA_1^{t-1}A_2^{t-1} \ldots A_{k_{t-1}}^{t-1}B_{t-1}\big),\ \ldots,\ \big(B_2A_1^1A_2^1 \ldots A_{k_1}^1B_1\big).$$

Ezeket összefűzve egy piros irányított kört kapunk a B_v csúcsokon keresztül. Elképzelhető, hogy az összefűzött utaknak volt közös csúcsa vagy éle, de ez csak annyit jelent, hogy több piros irányított kört is kaptunk. Ez azonban ellentmond a piros szín használatával kapcsolatban megfogalmazott feltételünknek, azaz ellentmondásra jutottunk, tehát bizonyításunk teljes.

Kerekes Boldizsár (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)