I. megoldás. Indirekten tegyük fel, hogy az egyik tag nem egész. Mivel a, b és c szerepe felcserélhető, föltehetjük, hogy például az első tag, $\frac{ab}{c}$ nem egész. Ez azt jelenti, hogy van olyan p prím, ami a nevező kanonikus alakjában magasabb kitevőn van, mint a számlálóban. Jelölje rendre x, y és z a p legmagasabb hatványának a kitevőjét, amivel a, b illetve c osztható. Ekkor az $\frac{ab}{c}$ tört számlálójának prímtényezős alakjában a p kitevője $x+y$, a nevezőjében z, és indirekt feltevésünk értelmében $z > x + y$.

A három tört összege

$$\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c}{abc} = \frac{a^2b^2 + c^2(a^2 + b^2)}{abc}.$$

Ez a tört egész, azaz a nevező osztja a számlálót. A számláló első tagjában p kitevője $2x+2y$, c^2-ben $2z$, $\left(a^2+b^2\right)$-ben pedig legalább $\min(2x, 2y)$; így $c^2\left(a^2 + b^2\right)$ kanonikus alakjában a p kitevője legalább

$$2z + \min(2x, 2y) \geq 2z > 2x + 2y.$$

Ebből következik, hogy a tört számlálójában a p maximális kitevője $2x + 2y$. A tört nevezőjében viszont p maximális kitevője $x + y + z > 2x + 2y$, ami ellentmondás.

Fülöp Csilla (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn., 9. évf.)

II. megoldás. Az

$$\left(x - \frac{ab}{c}\right)\left(x - \frac{bc}{a}\right)\left(x - \frac{ca}{b}\right) =$$
$$= x^3 - \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right)x^2 + \left(\frac{ab}{c}\cdot\frac{bc}{a} + \frac{ab}{c}\cdot\frac{ca}{b} + \frac{bc}{a}\cdot\frac{ca}{b}\right)x - \frac{ab}{c}\cdot\frac{bc}{a}\cdot\frac{ca}{b} =$$
$$= x^3 - \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right)x^2 + \left(a^2 + b^2 + c^2\right)x - abc$$

egész együtthatós polinom főegyütthatója 1, racionális gyökei pedig $\frac{ab}{c}$, $\frac{ac}{b}$ és $\frac{bc}{a}$.

A Rolle-tétel (racionális gyökteszt)[1] miatt ezek a gyökök egészek is, ami éppen a feladat állítása.

Hervay Bence (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.), *Mácsai Dániel* (Keszthelyi Vajda J. Gimn., 11. évf.)

[1] http://math.bme.hu/ nagyat/rolle.pdf