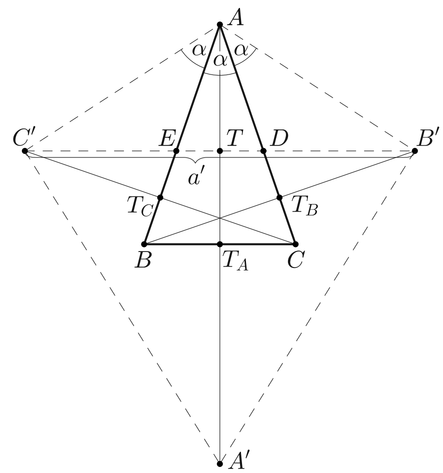
Legyen a háromszög alapja BC, szárainak metszéspontja A, szárszöge α, a tükörképpontok A', B', C', a magasságok talppontjai pedig T_A, T_B, T_C.

Kétféleképpen helyezkedhet el a tükrözéssel kapott háromszög az eredetihez képest, aszerint, hogy α kisebb vagy nagyobb, mint 60°. (Amennyiben $\alpha = 60^\circ$, a háromszög szabályos, a tükrözések után egy kétszer akkora háromszöget kapunk, mindkét arány pontosan 2.)

1. eset: $\alpha < 60^\circ$ (*1. ábra*).



1. ábra

$CBT_B\triangle \cong DB'T_B\triangle$, hiszen a szimmetria miatt $B'C' \parallel CB$, így $CBT_B\sphericalangle = T_BB'D\sphericalangle$, $BCT_B\sphericalangle = T_BDB'\sphericalangle$, mert váltószögek, továbbá a tükrözés miatt $BT_B = T_BB'$. Ezzel beláttuk, hogy $B'D = a$. Ugyanígy igazolható az is, hogy $C'E = a$. Az egyik arány az eddigiek alapján:

$$\frac{a'}{a} = \frac{B'C'}{a} = \frac{B'D + ED + C'E}{a} = \frac{2a + ED}{a} = 2 + \frac{ED}{a}.$$

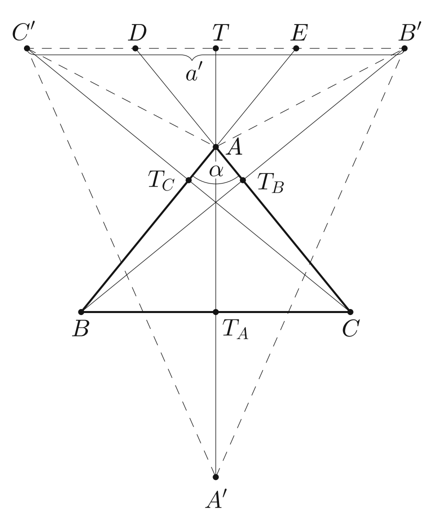
A tükrözés miatt $AT_A = T_AA'$, így a másik arány:

$$\frac{m'}{m} = \frac{TA'}{m} = \frac{AA' - AT}{m} = \frac{2m - AT}{m} = 2 - \frac{AT}{m}.$$

Az $ADE\triangle \sim ABC\triangle$, az oldalak és magasságok aránya megegyezik, vagyis $\dfrac{ED}{BC} = \dfrac{AT}{AT_A}$. Az a oldalt és az m magasságot beírva: $\dfrac{ED}{a} = \dfrac{AT}{m}$. Ebből a két arány összege valóban:

$$\frac{a'}{a} + \frac{m'}{m} = \left(2 + \frac{ED}{a}\right) + \left(2 - \frac{AT}{m}\right) = 4.$$

2. eset: $\alpha > 60^\circ$ (*2. ábra*).



2. ábra

Az első eset szerint haladva a tükrözés és a szimmetria alapján $B'D = C'E = a$. Ezzel kapjuk, hogy

$$\frac{a'}{a} = \frac{B'C'}{a} = \frac{B'D + C'E - DE}{a} = \frac{2a - DE}{a} = 2 - \frac{DE}{a}.$$

Az $A'B'C'$ háromszög alaphoz tartozó magassága $A'T = A'T_A + AT_A + AT = 2m + AT$. Az m'/m arány:

$$\frac{m'}{m} = \frac{A'T}{m} = \frac{2m + AT}{m} = 2 + \frac{AT}{m}.$$

Az ABC és AED háromszögek hasonlóságából az alapjaik aránya megegyezik a hozzájuk tartozó magasságok arányával:

$$\frac{DE}{a} = \frac{AT}{m}.$$

A két arány összege tehát ismét:

$$\frac{a'}{a} + \frac{m'}{m} = 2 - \frac{DE}{a} + 2 + \frac{AT}{m} = 4.$$

Lovas Márton (Békásmegyeri Veres Péter Gimn., Budapest, 8. évf.) dolgozata alapján