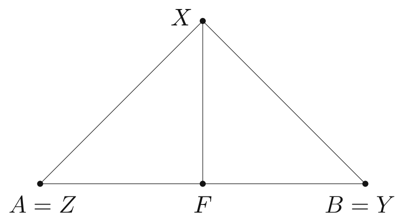
Készítsünk ábrát geogebrában, hátha megsejtünk valamit. A netes megoldás az alábbi oldalon található, és ott letölthető egy geogebra fájl, melyben a Z pont mozgatható az AF szakaszon:
https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=C1549&l=hu.

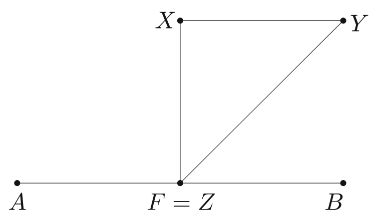
Ez alapján az a sejtés, hogy a kérdéses szög értéke 45°, illetve az XYZ háromszög egyenlő szárú és derékszögű. Bizonyítsuk ezt be.

Ha a Z pont az A pontba esik, akkor az Y pont a B ponttal egyezik meg, és az XZY háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, $XZY\sphericalangle = 45^\circ$ (*1. ábra*).



1. ábra

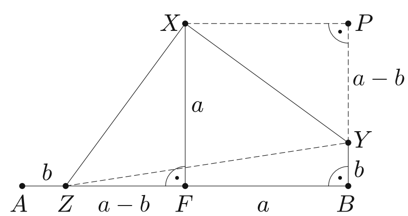
Ha a Z pont az F pontba esik, akkor az $XZBY$ négyszög négyzet, az XZY háromszög ekkor is egyenlő szárú derékszögű háromszög, és $XZY\sphericalangle = 45^\circ$ (*2. ábra*).



2. ábra

Ha a Z pont máshol helyezkedik el, arra az esetre adunk három megoldást. A honlapon két, ezektől különböző megoldás olvasható.

I. megoldás. Állítsunk merőlegest az X pontból a BY egyenesre, a talppontot jelölje P. Az $FBPX$ négyszög négyzet, mert három szöge derékszög és $FB = FX = a$. Ezért $PB = a$, és így $PY = a - b$ (*3. ábra*).



3. ábra

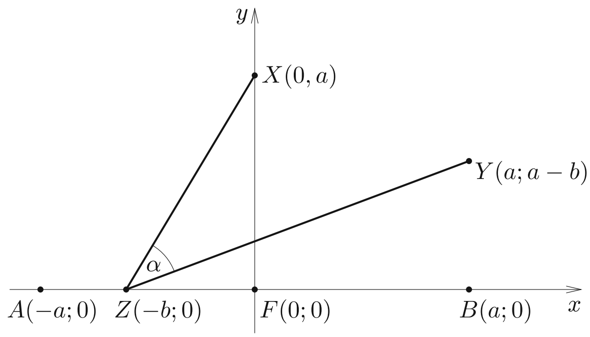
Mivel $PY = FZ = a - b$, $PX = FX = a$ és $YPX\sphericalangle = ZFX\sphericalangle = 90^\circ$, ezért az YPX és a ZFX háromszög egybevágó. Ebből következik, hogy $XY = XZ$ és $YXP\sphericalangle = ZXF\sphericalangle$. Innen adódik, hogy

$$90^\circ = FXP\sphericalangle = FXY\sphericalangle + YXP\sphericalangle = FXY\sphericalangle + ZXF\sphericalangle = ZXP\sphericalangle,$$

és így

$$XZY\sphericalangle = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

II. megoldás. Helyezzük az ábrát koordinátarendszerbe úgy, hogy az F pont az origóban legyen, az A pont koordinátája $(-a;0)$, a Z ponté pedig $(-b;0)$. Ekkor a B pont koordinátái $(a;0)$, az Y ponté pedig $(a;a-b)$ (*4. ábra*).



4. ábra

Írjuk fel a $\overrightarrow{ZX}$ és $\overrightarrow{ZY}$ vektorok skalárszorzatát kétféleképpen. Mivel $\overrightarrow{ZX} = (b; a)$ és $\overrightarrow{ZY} = (a+b; a-b)$, ezért egyrészt

$$\overrightarrow{ZX} \cdot \overrightarrow{ZY} = b(a+b) + a(a-b) = ab + b^2 + a^2 - ab = a^2 + b^2.$$

Másrészt

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ZX} \cdot \overrightarrow{ZY} &= \sqrt{b^2+a^2} \cdot \sqrt{(a+b)^2 + (a-b)^2} \cdot \cos\alpha = \\ &= \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{2\big(a^2+b^2\big)} \cdot \cos\alpha = \sqrt{2}\big(a^2+b^2\big)\cos\alpha.\end{aligned}$$

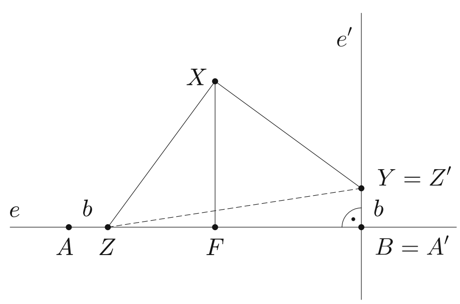
A kétfajta felírás egyenlő egymással:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\big(a^2+b^2\big)\cos\alpha &= a^2+b^2, \\ \cos\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \alpha &= 45^\circ,\end{aligned}$$

mivel 0° és 90° között van.

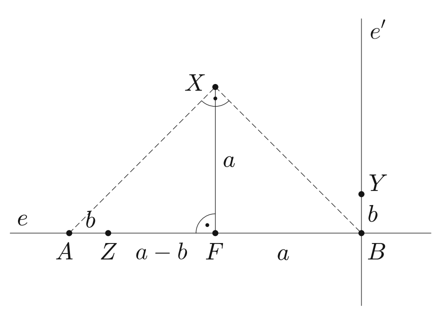
Gál Bence (Szolnok, Varga Katalin Gimn., 11. évf.)

III. megoldás. Mivel $FA = FX = FB$ és $AFX\sphericalangle = 90^\circ$, ezért az ABX háromszög egy $2a$ átlójú négyzet fele, $XA = XB$ és $AXB\sphericalangle = 90^\circ$ (*5. ábra*).



5. ábra

Forgassuk el az $e := AB$ egyenest az X pont körül 90°-kal. A kapott e' egyenes merőleges lesz az e egyenesre, így megegyezik a feladatban B-ben állított AB-re merőleges egyenessel (*6. ábra*).



6. ábra

Mivel $AX = BX$ és $AXB\sphericalangle = 90^\circ$, ezért a forgatás során A képe B lesz. Tudjuk, hogy $b = AZ = A'Z' = BY$, így Z képe $Y = Z'$. Mivel a forgatás távolságtartó, így $XZ = XZ' = XY$, és mivel 90 fokkal forgattunk, így $ZXZ'\sphericalangle = ZXY\sphericalangle = 90^\circ$. Tehát az XZY egy egyenkő szárú derékszögű háromszög, és így a keresett szög, $XZY\sphericalangle = 45^\circ$.