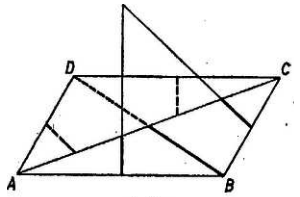
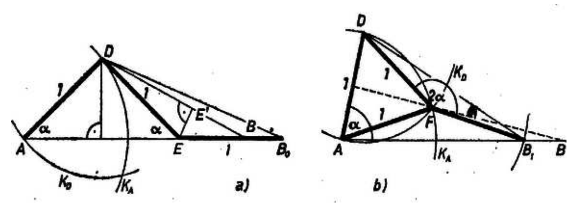
I. A feladat feltételei közül egyelőre csak annyit használunk fel, hogy α hegyesszög. Így az ABC háromszögben B-nél tompaszög van, az AB és BC szakaszok felező merőlegesei a háromszögön kívül metszik egymást, az AC oldalt az előbbi A-hoz közelebb, az utóbbi C-hez közelebb metszi (1. ábra).



1. ábra

Ez a két felező merőleges tehát olyan három részre vágja az ABC háromszöget, hogy mindegyik rész belső pontjaihoz az illető rész által tartalmazott csúcs van a háromszög csúcsai közül a legközelebb. A BD szakasznak a háromszögbe eső része a B-hez tartozó részben fut, mert végpontja egyenlő távolságra van A-tól és C-től. Hasonló állítás igaz az ACD háromszögre is, így az ABD háromszög pontjaihoz az A, B, C, D pontok közül az A, B, D csúcsok valamelyike van legközelebb – elegendő tehát annak a szükséges és elegendő feltételét megvizsgálnunk, hogy az ABD háromszöget a K_A, K_B; K_D körök lefedjék.

Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy α $60°$-nál kisebb-e vagy nagyobb. Ha $0 < \alpha \leq 60°$, a K_A körnek a BAD szögtartományba eső része egyszersmind a K_D körnek is része, így csak azt kell megvizsgálnunk, hogy a K_B, K_D körök mikor fedik le az ABD háromszöget. $a > 1$ esetén a K_B kör az AB szakaszból egységnyi hosszúságú részt vág le, a K_D körből az AB egyenesre eső húr hossza pedig $2\cos\alpha$.



2. ábra

Ha e két kör lefedi az AB szakaszt, e részek összege nem kisebb az AB szakasz hosszánál ($2a$ ábra):

$$a \leq 2\cos\alpha + 1. \tag{2}$$

Ez $a \leq 1$ esetén is teljesül, tehát $0 < \alpha \leq 60°$ mellett a fedés szükséges feltétele. Feltételünk úgy is fogalmazható, hogy az ABD háromszög része legyen annak az AB_0D háromszögnek, melyben $AB_0 = 2\cos\alpha + 1$. Messe K_D az AB egyenest E-ben, akkor $AD = DE = EB_0 = 1$.

Megmutatjuk, hogy (2) elégséges feltétel. Valóban, K_D lefedi az AED háromszöget, így ha B az AE szakaszon van, K_D maga lefedi az ABD háromszöget. Ha B az EB_0 szakaszon van, K_B lefedi E-t $EB \leq 1$ miatt. Legyen E vetülete BD-n E', akkor az EBE' háromszöget a K_B kör, az $EE'D$ háromszöget a K_D kör fedi le, hiszen pl. az EBE' háromszögben a B-től legtávolabbi pont az E csúcs, és K_B azt is lefedi.

Ha $60° \leq \alpha \leq 90°$, legyen az AD egyenes B-t tartalmazó oldalán F az a pont, melyre $AF = DF = 1$. Messe az F körüli egységsugarú K_F kör az AB egyenest B_1-ben. Az AB_1F egyenlő szárú háromszögben $B_1AF\sphericalangle = \alpha - 60°$, ezért ($2b$ ábra)

$$AB_1 = 2\cos(\alpha - 60°) = \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha.$$

Így pedig a feladat állításában szereplő (1) feltétel esetünkben ekvivalens azzal, hogy B az AB_1 szakaszon legyen, vagyis az AB_1D háromszög tartalmazza az ABD háromszöget. Megmutatjuk, hogy $60° \leq \alpha \leq 90°$ mellett ez szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a K_A, K_B, K_D körök lefedjék az ABD háromszöget.

Feltételünk elégséges, hiszen ha B az AB_1 szakaszon van, az F pontot mindhárom kör lefedi, és ebből a fentiekhez hasonlóan látható be, hogy a K_A és K_B körök együtt lefedik az AFB háromszöget, K_B és K_D együtt a BFD háromszöget, K_A és K_D pedig együtt az AFD háromszöget fedik le. (Természetesen nem okoz zavart, ha F nincs is benne az ABD háromszögben.)

Fordítva, ha B az AB_1 szakasz B_1-en túli meghosszabbításán van, az FB egyenes a K_A, K_D körök belsejében levő AD szakaszt annak belsejében metszi, így F az ABD háromszög belsejében van, és a K_A, K_D körök az FB szakasznak csak az F végpontját fedik le. B viszont a K_F körön kívül van, tehát $FB > 1$, így az FB szakaszt nem fedheti le teljes egészében a K_B kör. Eszerint feltételünk szükséges is.

Összefoglalva az eddigieket: ha az ABD háromszög tetszőleges, akkor $0 < < \alpha \leq 60°$ esetén (2), $60° \leq \alpha \leq 90°$ esetén (1) a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a K_A, K_B, K_C, K_D körök lefedjék az $ABCD$ paralelogrammát.

II. Utolsó lépésként megmutatjuk, hogy ha $0 < \alpha \leq 60^\circ$, és az ABD háromszög hegyesszögű, akkor (1) is, (2) is mindig teljesül. Valóban, a $2a$ ábrán $ADB_0\sphericalangle = 180^\circ - 3\alpha/2$, a $2b$ ábrán $ADB_1\sphericalangle = 150^\circ - \alpha$, tehát $0 < \alpha \leq 60^\circ$ mellett mindkettő tompaszög; ha tehát az ABD háromszögben D-nél hegyesszög van, az AB_0D, ill. az AB_1D háromszög tartalmazza az ABD háromszöget.

Ha tehát $0 < \alpha \leq 60^\circ$, és az ABD háromszög hegyesszögű, köreink mindig fedik a paralelogrammát, és az (1) feltétel is mindig teljesül, így hegyesszögű ABD háromszög esetén (1) az egész $0 < \alpha < 90^\circ$ intervallumban szükséges és elégséges feltétele a fedésnek.

Megjegyzés. Hasonló módon látható, hogy ha az $ADB\sphericalangle$ tompaszög, és $60^\circ < \alpha \leq 90^\circ$, akkor a körök sosem fedik az $ABCD$ paralelogrammát.