

Jelölje a minimalizálandó összeget E , és próbáljuk E -t négyzetösszegé alakítani. Az

$$x^2 + xy + y^2 = 3/4(x+y)^2 + 1/4(x-y)^2$$

azonosságot először az $x = a$, $y = b$, majd az $x = c$, $y = d$ szereposztással alkalmazva

$$E = 3/4(a+b)^2 + 3/4(c+d)^2 + 1/4(a-b)^2 + 1/4(c-d)^2.$$

Legyen $a+b = P$, $c+d = Q$, $a-b = R$, $c-d = S$. Ezekkel a jelölésekkel

$$E = 3/4P^2 + 3/4Q^2 + 1/4R^2 + 1/4S^2,$$

és az $ad - bc = 1$ feltétel az $RQ - PS = 2$ feltétellel ekvivalens. Ez utóbbit felhasználva, E -t tovább alakítjuk:

$$\begin{aligned} E &= 3/4P^2 + 1/4S^2 + \sqrt{3}/2PS + 3/4Q^2 + 1/4R^2 - \sqrt{3}/2RQ + \sqrt{3}/2(RQ - PS) = \\ &= (\sqrt{3}/2P + 1/2S)^2 + (\sqrt{3}/2Q - 1/2R)^2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Innen látszik, hogy $E \geq \sqrt{3}$ hiszen E két négyzetszám és $\sqrt{3}$ összege. Az egyenlőség el is érhető az $S = -\sqrt{3}P$, $R = \sqrt{3}Q$ választással, $P^2 + Q^2 = 2/\sqrt{3}$ esetén az $RQ - PS = 2$ feltétel is teljesül. Így E minimuma $\sqrt{3}$.

Strausz György (Budapest, József A. Gimn., III. o. t.)