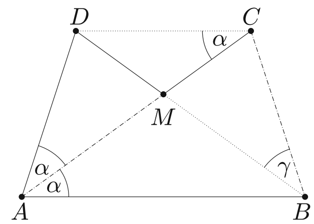
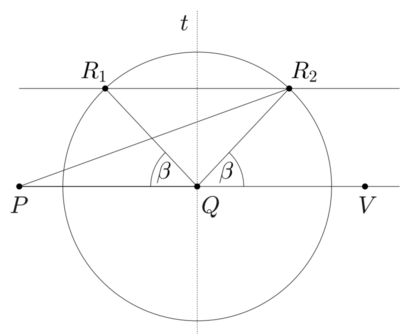
A trapéz alapjain fekvő $CAB\sphericalangle$ és $ACD\sphericalangle$ szögek váltószögek, tehát egyenlők. Emiatt az ACD háromszög egyenlő szárú. A trapéz ismert tulajdonsága, hogy az AMD és BCM háromszögek területe egyenlő. Azt is tudjuk a feladat feltételei, illetve az előbbi szögegyenlőség alapján, hogy $AM = BC$, továbbá $BM = CD = DA$. Vagyis az AMD és BCM háromszögeknek nem csak a területük egyezik meg, hanem két-két oldaluk is (*1. ábra*).



1. ábra

Belátjuk, hogy ez a két háromszög egybevágó is.

Ehhez először azt vizsgáljuk meg, hogy hány olyan nem egybevágó háromszög van, amelynek két-két oldala és területe megegyezik. Ha adott a terület, akkor ismerjük az adott oldalakhoz tartozó magasságokat is. Ha felvesszük az egyik adott oldalt (PQ) és az ismert hozzátartozó magassággal párhuzamost húzunk ezzel az oldallal, akkor biztos, hogy a háromszög harmadik csúcsa csak ezen a párhuzamos egyenesen helyezkedhet el. A harmadik csúcs (R) ezen kívül rajta van az adott szakasz egyik végpontja mint középpont körül rajzolt, a másik adott oldal hosszúságával megegyező sugarú körvonalon. A párhuzamos egyenes és a körvonal egymást legfeljebb két pontban metszi (R_1, R_2) a *2. ábra* szerint. (A másik párhuzamos egyenes berajzolása, a végpontok és a körüljárás felcserélése nem vezet ezektől eltérő megoldásra.)



2. ábra

A kör középpontjában a PQ egyenesre állított merőleges egyenesre szimmetrikusan helyezkednek el az R_1Q és R_2Q szakaszok, ezért $PQR_1\sphericalangle = VQR_2\sphericalangle$, tehát a PQR_1 és PQR_2 szögek, ha nem egyenlők, akkor $180°$-ra egészítik ki egymást.

Most térjünk vissza az AMD és BCM háromszögek vizsgálatához. Előfordulhat-e itt, hogy az első ábrán α-val és γ-val jelölt szögek kiegészítő szögek? A szögek elhelyezkedése alapján $\alpha = ACD\sphericalangle < BCD\sphericalangle$ és $\gamma = DBC\sphericalangle < ABC\sphericalangle$, így ekkor

$$180° = \alpha + \gamma < BCD\sphericalangle + ABC\sphericalangle$$

lenne, ez pedig ellentmondás, mert az $ABCD$ trapéz B-hez és C-hez tartozó szögei $180°$-ra egészítik ki egymást. Az α és γ szögek tehát ugyanakkorák.

Innen a megoldás már néhány lépésben befejezhető. Beláttuk tehát, hogy $DAM\triangle \cong MBC\triangle$. Az AMD és BMC szögek csúcsszögek, ezek is egyenlők, vagyis $ADM\sphericalangle = BMC\sphericalangle = AMD\sphericalangle = BCM\sphericalangle$. Ez a két háromszög tehát egyenlő szárú is. A DMC háromszög is egyenlő szárú, ennek a háromszögnek külső szöge a $DMA\sphericalangle$, amely ezek szerint 2α nagyságú. Az AMD egyenlő szárú háromszög szögeire

$$MAD\sphericalangle + AMD\sphericalangle + MDA\sphericalangle = \alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°.$$

Innen $\alpha = 36°$, végül az $ABCD$ trapéz szögei $72°$, $72°$, $108°$, $108°$.

Fleiner Zsigmond (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján