Azt fogjuk belátni, hogy az $n \geq 8$ esetekben bármelyik kiinduló színezés esetén elérhető, hogy a számok pirosak legyenek, viszont $n \leq 7$ esetén mindig megadható olyan alaphelyzet is, amikor ez nem érhető el.

Először azt mutatjuk meg, hogy nyolc szomszédos szám esetén mindig megadható olyan néhány lépésből álló színezési sorozat, amely végül a nyolc szám közül egynek a színét megváltoztatja, a többit pedig változatlanul hagyja.

Az alábbi táblázatban a felső sorban elhelyezett számok jelentsék a nyolc szám közül annak a sorszámát, amelynek a színét kizárólagosan meg akarjuk változtatni, míg az alatta elhelyezkedő sorozatok azt, hogy ez a változtatás (csak ennek a nyolc számnak a felhasználásával) milyen lépésekkel érhető el.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
4, 5, 6	5, 6, 7	4, 5, 6	1, 2, 3	2, 3, 4	1, 2, 3	1, 2, 3	2, 3, 4
5, 6, 7	6, 7, 8	1, 4, 7	2, 3, 4	3, 4, 5	1, 4, 7	2, 3, 4	3, 4, 5
1, 4, 7	2, 5, 8	6, 7, 8	4, 5, 6	5, 6, 7	3, 4, 5	1, 4, 7	2, 5, 8
		2, 5, 8	5, 6, 7	6, 7, 8	2, 5, 8		
		1, 2, 3	1, 4, 7	2, 5, 8	6, 7, 8		

Tehát ha $n \geq 8$, akkor bármelyik kék számra tekinthetünk egy szomszédos nyolcast és azzal ezt a számot a fenti sorozatok valamelyikével pirosra színezhetjük.

Meg kell még mutatni, hogy $n \leq 7$-re mindig van olyan kiinduló helyzet, amelyből nem színezhető a megengedett lépésekkel midegyik szám pirosra.

Ha $n = 1$ vagy $n = 2$, és nem csak piros színű számaink vannak, akkor nem tudjuk a színezésüket megváltoztatni.

Legyen ezek után $3 \leq n \leq 7$ és induljunk ki abból a helyzetből, amikor a 2 kék, a többi szám pedig piros színű. Nevezzük a színezés szempontjából *fontos számok*nak a 2, 3, 5, 6 közül azokat, amelyek nem nagyobbak, mint az aktuális n. A következő táblázatban a *fontos számokat* félkövéren szedtük.

1	**2**	**3**	4	**5**	**6**	7

$n = 7$-ig a lehetséges háromtagú számtani sorozatok:

$$\{1, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}, \{\mathbf{2}, \mathbf{3}, 4\}, \{\mathbf{3}, 4, \mathbf{5}\}, \{4, \mathbf{5}, \mathbf{6}\}, \{\mathbf{5}, \mathbf{6}, 7\}, \{1, \mathbf{3}, \mathbf{5}\}, \{\mathbf{2}, 4, \mathbf{6}\}, \{\mathbf{3}, \mathbf{5}, 7\}, \{1, 4, 7\}.$$

Természetesen, ha $n < 7$, akkor ezek közül azokat el kell hagyni, amelyekben az n-nél nagyobb szám is előfordul.

A bizonyítás szampontjából azonban ez nem jelent problémát, mert sorra ellenőrizhetően mindegyik ilyen sorozatban a „fontos számok” közül pontosan nulla vagy kettő szerepel, azaz ezen lépések egyike sem fogja a színezésben szereplő kék számok paritását megváltoztatni. Induláskor csak egy szám, nevezetesen a 2 volt kék, így nem érhető el, hogy mindegyik szám piros legyen.

Terjék András József (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján