Vegyük a és b harmonikus közepét:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2}{\frac{a+b}{ab}}=\frac{2ab}{a+b}.$$

Látható, hogy a feladatban a logaritmusok argumentumaként szereplő értékeket kapjuk.

Legyen c egy valós szám, melyre teljesül, hogy $0<c<1$. Ekkor az $f(x)=\log_c(x)$ függvény szigorúan monoton csökkenő, de helyettesítési értéke a $]0,1[$ tartományon végig pozitív marad, hiszen $x=1$-re $f(x)=f(1)=\log_c(1)=0$. Mivel a függvény szigorúan monoton csökken, ezért ha $x_1\le x_2$, akkor $f(x_1)\ge f(x_2)$, és egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $x_1=x_2$.

A nevezetes közepekre való össszefüggés szerint két pozitív szám mértani közepe nem kisebb azok harmonikus közepénél. Ez a-ra és b-re a következőt jelenti: $\sqrt{ab}\ge\dfrac{2ab}{a+b}$. Mivel a és b 1-nél kisebb pozitív számok, ez (a fentiek alapján) azt jelenti, hogy

$$\log_a\left(\sqrt{ab}\right)\le\log_a\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\quad \text{és}\quad \log_b\left(\sqrt{ab}\right)\le\log_b\left(\frac{2ab}{a+b}\right).$$

Mivel (a fentiek alapján) tudjuk, hogy mind a négy logaritmikus kifejezés értéke pozitív, felírhatjuk, hogy

$$\log_a\left(\sqrt{ab}\right)\log_b\left(\sqrt{ab}\right)\le\log_a\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\log_b\left(\frac{2ab}{a+b}\right).$$

Így tehát elég belátnunk, hogy $\log_a\left(\sqrt{ab}\right)\log_b\left(\sqrt{ab}\right)\ge 1$, hiszen ekkor a feladatban szereplő egyenlőtlenség is teljesül.

Tegyük fel, hogy $\log_a\left(\sqrt{ab}\right)\log_b\left(\sqrt{ab}\right)\ge 1$. Ekvivalens átalakításokat használva:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\log_a(ab)\cdot\frac{1}{2}\log_b(ab)&\ge 1,\\
\log_a(ab)\log_b(ab)&\ge 4,\\
(\log_a a+\log_a b)(\log_b a+\log_b b)&\ge 4,\\
(1+\log_a b)(\log_b a+1)&\ge 4,\\
\log_b a+1+\log_a b\log_b a+\log_a b&\ge 4,\\
\log_a b+\log_b a+\log_a b\log_b a&\ge 3.
\end{aligned}$$

Az ismert összefüggés szerint $\log_b a=\dfrac{\log_a a}{\log_a b}=\dfrac{1}{\log_a b}$. Ezt felhasználva az egyenlőtlenség tovább alakítható:

$$\begin{aligned}
\log_a b+\frac{1}{\log_a b}+1&\ge 3,\\
\log_a b+\frac{1}{\log_a b}&\ge 2,\\
(\log_a b)^2-2\log_a b+1&\ge 0,\\
(\log_a b-1)^2&\ge 0.
\end{aligned}$$

Egy valós szám négyzete mindig nemnegatív, így ez az egyenlőtlenség mindig teljesül. Egyenlőség $\log_a b=1$ esetén áll fenn. Ekkor $a=b$.

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, így a feladatban szereplő egyenlőtlenség is minden esetben teljesül, és egyenlőség $a=b$ esetén áll fenn.

Mészáros Márton (Pápa, Türr István Gimn. és Koll., 12. évf.)