A lézersugár pályagörbéjét leíró egyenlet

$$z(x) = A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right), \tag{1}$$

ennek az inverze (a $0 \le x \le \lambda$ intervallumon):

$$x(z) = \frac{\lambda}{2\pi}\arccos\frac{z}{A}. \tag{2}$$

Az (1) egyenletet x szerint deriválva:

$$z'(x) = -\frac{2\pi}{\lambda}A\sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right). \tag{3}$$

A derivált abszolút értéke megegyezik a $z =$ állandó „réteghez" tartozó α beesési szög kotangensével:

$$z'(x) = -\operatorname{ctg}\alpha. \tag{4}$$

(A függvény meredekségét jellemző szöget – aminek a tangense a függvény deriváltja – az x tengelytől mérjük, az optikai beesési szöget pedig a z tengelytől számítjuk. A két szög egymás pótszöge.)

A Snellius–Descartes-törvény szerint

$$n(z)\cdot\sin\alpha = \text{konstans},$$

és mivel a lézersugár belépési pontjánál $\alpha = 90^\circ$ és $n = n_0$, a fenti képletben szereplő állandó éppen n_0:

$$n(z)\sin\alpha = n_0,$$

vagyis

$$n(z) = \frac{n_0}{\sin\alpha} = n_0\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}. \tag{5}$$

A (3), (4) és (5) összefüggések felhasználásával:

$$n(z) = n_0\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{\lambda}A\right)^2\sin^2\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)}.$$

Innen (2) behelyettesítésével kapjuk, hogy

$$n(z) = n_0\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{\lambda}A\right)^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2\pi}\arccos\frac{z}{A}\right)},$$

amit egyszerűsítve, és $\sin^2\big(\arccos(x)\big) = 1 - x^2$ felhasználásával

$$n(z) = n_0\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{\lambda}A\right)^2\cdot\left(1-\left(\frac{z}{A}\right)^2\right)},$$

vagyis

$$n(z) = n_0\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{\lambda}A\right)^2-\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2z^2} \tag{6}$$

adódik.

Tudjuk még, hogy $z = 0$-nál a törésmutató

$$n(0) = n_1 = \frac{1{,}6}{1{,}5}n_0 = n_0\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{\lambda}A\right)^2}.$$

Ebből kiszámíthatjuk a pályagörbe keresett hullámhosszát:

$$\lambda = \frac{2\pi A}{\sqrt{\left(\frac{1{,}6}{1{,}5}\right)^2-1}} \approx 0{,}169\ \text{m},$$

majd ezt (6)-ba visszahelyettesítve megkapjuk a törésmutató z-függését:

$$n(z) \approx 1{,}5\sqrt{1{,}138 - 0{,}138\,\frac{1}{\text{cm}^2}\,z^2}.$$

Varga Vázsony (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)