a) A vízszintes lapon mozgó, kicsiny, m tömegű korongra a pillanatnyi v sebességével arányos (azzal ellentétes irányú)

$$F(v) = -\alpha v$$

fékezőerő hat, emiatt

$$a = -\frac{\alpha}{m}v \tag{1}$$

„gyorsulással" (ténylegesen lassulva) mozog.

Mivel a gyorsulás a sebesség, a sebesség pedig az s megtett út időegységre eső megváltozása (precízen megfogalmazva: az idő szerinti első deriváltja),

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{\alpha}{m}\frac{\Delta s}{\Delta t}, \qquad \text{azaz} \qquad \Delta v = -\frac{\alpha}{m}\Delta s.$$

A kis változásokat összegezve (integrálva) megkapjuk a korong sebességét a megtett út függvényében:

$$v(s) = -\frac{\alpha}{m}s + \text{állandó}.$$

Ha a korong elmozdulását egy olyan ponttól mérjük, ahol a korong sebessége egy ismert v_0 érték, akkor a fenti egyenletben szereplő állandó nagysága éppen v_0, tehát a mozgást a

$$v(s) = v_0 - \frac{\alpha}{m}s$$

egyenlet írja le. Ebből leolvasható, hogy az m tömegű korong a megállásáig

$$s_0 = \frac{m}{\alpha}v_0 \tag{2}$$

utat tesz meg. Mivel az első kísérletben $s_0 = 50$ cm, a fékezőerő együtthatója

$$\alpha = \frac{mv_0}{s_0} = \frac{mv_0}{50\ \text{cm}}.$$

Legyen a másik, kezdetben álló korong tömege M, a pillanatnyi sebességét és gyorsulását pedig jelöljük V-vel és A-val. Közvetlenül az ütközés előtt a korongok sebessége $v = v_0/2$ és $V = 0$, az ütközés után pedig $v = v_1$ és $V = V_1$. (Az ütközés utáni sebességeket nem ismerjük, ezeket később még meg kell határoznunk.)

A két korong ugyanott áll meg, tehát az ütközéstől a megállásig megtett d-vel jelölt útjuk ugyanakkora. A második korong mozgásegyenletét az (1) egyenlet mintájára írhatjuk fel:

$$F(V) = M\,A(V) = -\alpha V,$$

amiből – a (2)-nél leírtakhoz hasonló érveléssel – következik, hogy a megállásig megtett útja

$$d = \frac{M}{\alpha}V_1, \tag{3}$$

az m tömegű korongra pedig ez érvényes:

$$d = \frac{m}{\alpha}v_1. \tag{4}$$

A fenti két egyenletből kapjuk, hogy

$$mv_1 = MV_1, \tag{5}$$

vagyis az ütközés után a két korong lendülete megegyezik egymással.

Az ütközés egyenes (a mozgások egy egyenesen történnek) és rugalmas. Az ütközés során mind az összimpulzus (összes lendület), mind pedig a mechanikai energiák összege *megmarad.* Az impulzusmegmaradást a következő módon írhatjuk fel:

$$m\frac{v_0}{2} = mv_1 + MV_1,$$

amiből (5) felhasználásával

$$m\frac{v_0}{2} = 2mv_1,$$

azaz

$$v_1 = \frac{1}{4}v_0 \tag{6}$$

következik

A mechanikai energia megmaradási törvénye szerint

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}MV_1^2,$$

tehát (5) és (6) ismeretében

$$\frac{1}{8}mv_0^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{4}\right)^2+\frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}\,\frac{v_0}{4}\right)^2,$$

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{32}+\frac{1}{32}\,\frac{m}{M},$$

és végül a kérdezett tömegarányra $\dfrac{m}{M}=3$ adódik.

b) A (4), (6) és (2) összefüggések szerint a korongok az ütközés helyétől

$$d=\frac{m}{\alpha}v_1=\frac{m}{\alpha}\,\frac{v_0}{4}=\frac{s_0}{4}=12{,}5\ \mathrm{cm}$$

távolságban, éppen egymás mellett állnak meg.

Varga Vázsony (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. Belátható, hogy mindkét korong sebessége az idő exponenciális függvénye szerint (nagyon gyorsan) tart nullához, tehát – ha valóban csak a feladatban szereplő fékezőerő hatna rájuk – véges idő alatt sohasem állhatnának meg. A fenti megoldásban kapott d távolság úgy értendő, hogy ekkora út megtétele után csökken a korongok sebessége elhanyagolhatóan kicsiny értékre.