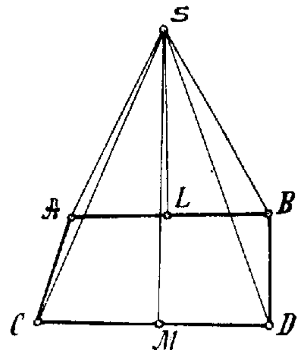
397.[1] Mennyiségtani játékok.

A K.M.L. IV. évfolyamának 7. számában néhány tréfás algebrai bizonyítást mutattunk be; lássunk most geometriai bizonyításokat, melyek hibás eredményre vezetnek.

1. Kimutatjuk, hogy a tompa szög egyenlő a derékszöggel. Legyen adva az $ABCD$ négyszög, melyben $ABD\angle = 90°$, BAC szög tompaszög és $AC = BD$. AB és CD oldalak középpontjaiban merőlegeseket emelünk, melyek egymást S pontban metszik.



Kössük össze S-et a négyszög csúcspontjaival. Nyilvánvaló, hogy

$$SA = SB,\ SC = SD.$$

Minthogy továbbá feltevés szerint $BD = AC$, tehát

$$SAC\triangle \cong SBD\triangle,$$

mert oldalaik sorban egyenlők. Ennélfogva

$$CAS\sphericalangle = DBS\sphericalangle.$$

Másrészt világos, hogy

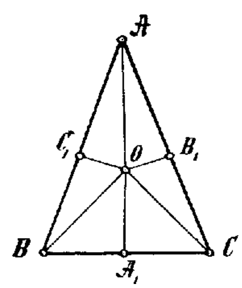
$$LAS\sphericalangle = LBS\sphericalangle,$$

mert az SAB háromszög egyenlőszárú s így

$$CAS\sphericalangle - LAS\sphericalangle = DBS\sphericalangle - LBS\sphericalangle$$

tehát $CAB\sphericalangle = ABD\sphericalangle$.

2. Minden háromszög egyenlőszárú. Rajzoljuk meg az ABC háromszögben az AO szögfelezőt s emeljünk BC középpontjában merőlegest. Ha $AO \perp BC$-re, akkor AO egybe esik A_1O-val, $AB = AC$ és a háromszög egyenlőszárú. De ha AO nem merőleges BC-re, akkor AO és A_1O egymást egy O pontban metszik.



Bocsássunk O-ból az AB és AC oldalakra merőlegeseket. Ekkor

$$AOB_1\triangle \cong AOC_1\triangle$$

mert mindkettő derékszögű, AO átfogójuk közös és $OAB_1\sphericalangle = OAC_1\sphericalangle$. Tehát

(1) $$AB_1 = AC_1$$

és

$$OB_1 = OC_1.$$

Továbbá

$$A_1OB\triangle \cong A_1OC\triangle,$$

mert mindkettő derékszögű és befogóik egyenlők. Ennélfogva

$$OB = OC.$$

Végül

$$OB_1C\triangle \cong OC_1B\triangle,$$

mert mindkettő derékszögű, továbbá a megelőzők szerint $OB = OC$ és $OC_1 = OB_1$. Így tehát

$$BC_1 = CB_1 \tag{2}$$

(1)-ből és (2)-ből tehát következik, hogy

$$AB_1 + B_1C = AC_1 + C_1B$$

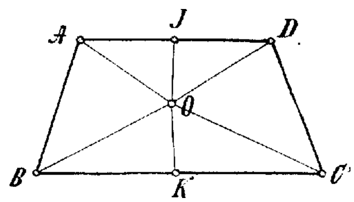
vagy

$$AC = AB$$

s így az ABC háromszög csakugyan eyenlőszárú.

3. Ha egy négyszögben két szemközt fekvő oldal egyenlő, akkor a másik két szemközt fekvő oldal párhuzamos.

Ha tehát $AB = DC$, akkor $AD \parallel BC$. Emeljünk az AD és BC oldalak középpontjaiban merőlegeseket, melyek egymást O-ban metszik és kössük össze O-t a négyszög csúcspontjaival.



Nyilvánvaló, hogy

$$OA = OD,\ OB = OC$$

és a feltevés szerint

$$AB = DC$$

tehát

$$OAB\triangle \cong ODC\triangle$$

s így

$$AOB\sphericalangle = DOC\sphericalangle.$$

De másrészt

$$JOA\sphericalangle = JOD\sphericalangle \text{ és } BOK\sphericalangle = COK\sphericalangle,$$

tehát

$$JOA\sphericalangle + AOB\sphericalangle + BOK\sphericalangle = JOD\sphericalangle + DOC\sphericalangle + COK\sphericalangle.$$

Minthogy az egy pont körül fekvő szögek összege 360°, ezért

$$JOA\sphericalangle + AOB\sphericalangle + BOK\sphericalangle = 180^\circ$$

vagyis $JOK\sphericalangle$ egyenes szög, tehát JO és OK egy ugyanazon egyenesbe esnek. Ha pedig AD és BC ugyanazon JK egyenesre merőlegesek, akkor AD csakugyan párhuzamos BC-vel.