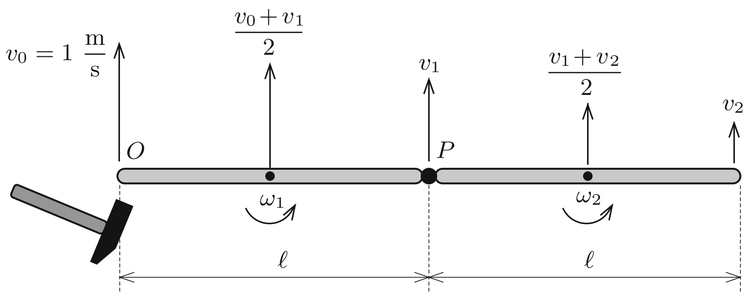
A hirtelen erőlökést követő pillanatban még nincsenek oldalirányú sebességek, hiszen a rudak hossza adott, és az egész rendszer oldalirányú lendülete nulla. Használjuk az *ábrán* látható jelöléseket, és az ott bejelölt irányokat tekintsük pozitívnak.



A rendszernek az O pontra vonatkoztatott perdülete az ütés utáni pillanatban *nulla*, hiszen a kezdeti perdület nulla volt, és az erőlökés iránya (hatásvonala) átmegy az O ponton, tehát az erre a pontra vonatkoztatott forgatónyomaték nulla.

A teljes perdület a tömegközéppont körüli forgásból adódó *sajátperdület* és a tömegközéppont mozgásából adódó *pályaperdület* összege. Mivel az ℓ hosszúságú, m tömegű homogén rúd tehetetlenségi nyomatéka $\frac{1}{12}m\ell^2$, a rendszer teljes perdülete:

$$0 = m\frac{v_0+v_1}{2}\,\frac{\ell}{2} + \frac{1}{12}m\ell^2\,\frac{v_1-v_0}{\ell} + m\frac{v_1+v_2}{2}\,\frac{3\ell}{2} + \frac{1}{12}m\ell^2\,\frac{v_2-v_1}{\ell},$$

vagyis

$$0 = v_0 + 6v_1 + 5v_2. \tag{1}$$

A Δt ideig tartó, F nagyságú erő $F\Delta t$ erőlökésnek felel meg. (Egy hirtelen ütésnél F nagyon nagy, Δt pedig nagyon kicsi.) Newton törvénye értelmében a rendszer impulzusának (lendületének) megváltozása az erőlökés nagyságával egyezik meg:

$$F\Delta t = m\frac{v_0+v_1}{2} + m\frac{v_1+v_2}{2}. \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenlet kettőnél több ismeretlent tartalmaz (v_1-et, v_2-t és $F\Delta t$-t), belőlük a keresett v_2-t még nem tudjuk meghatározni. A hiányzó harmadik összefüggést a *munkatétel* adhatja. A rúd megütött végére F nagyságú erő hat, és az elmozdulása (a nulláról v_0-ra növelt sebesség átlagos értékével számolva) $(v_0/2)\Delta t$. A végzett munka tehát

$$W = \frac{v_0}{2}F\Delta t,$$

vagyis (2) felhasználásával:

$$W = \frac{mv_0}{4}(v_0 + 2v_1 + v_2). \tag{3}$$

Ez a munka megegyezik a meglökött rendszer teljes mozgási energiájával. Egy-egy rúddarab mozgási energiája két tag (a tömegközéppontba képzelt tömegpont mozgási energiájának és a tömegközéppont körüli forgás energiájának) összegeként kapható meg. A teljes mozgási energia az egyes rúddarabok mozgási energiájának összege:

$$E_{\text{mozgási}} = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0+v_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m\ell^2\right)\left(\frac{v_1-v_0}{\ell}\right)^2 + \\ + \frac{1}{2}m\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m\ell^2\right)\left(\frac{v_2-v_1}{\ell}\right)^2.$$

A munkatétel szerint $W = E_{\text{mozgási}}$, ahonnan (3) felhasználása és algebrai átalakítások után ez adódik:

$$4v_1^2 + 2v_1v_2 + 2v_2^2 = 4v_1v_0 + 3v_0v_2 + v_0^2. \tag{4}$$

Fejezzük ki (1)-ből v_1-et:

$$v_1 = -\frac{v_0+5v_2}{6},$$

majd helyettesítsük be ezt a kifejezést a (4) egyenletbe. Algebrai átalakítások után a

$$14v_2^2 + 5v_2v_0 - v_0^2 = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek megoldásai:

I. eset: $$v_2 = -\frac{1}{2}v_0, \qquad \text{és ekkor} \qquad v_1 = \frac{1}{4}v_0,$$

illetve

II. eset: $$v_2 = \frac{1}{7}v_0, \qquad \text{és ekkor} \qquad v_1 = -\frac{2}{7}v_0.$$

Mindkét „megoldás" kielégíti a lendületváltozás és az O pontra vonatkozó perdületváltozás, valamint a munkatétel egyenleteit. Nyilvánvaló, hogy csak az egyik lehet helyes, hiszen az O pontbeli ütés után a rendszer nem viselkedhet kétféleképpen.

Vajon melyik a helyes megolás? Belátjuk, hogy ténylegesen a II. esetnek megfelelő mozgás valósul meg, az első eset csak egy (a matematikai lépések során előbukkant) „hamis gyök".

Nevezzük az erőlökéssel megegyező (az ábrán felfelé mutató, pozitívnak tekintett) irányt „előrefelének", az ezzel ellentétes irányt pedig „hátrafelének". A szögsebesség, a perdület és a forgatónyomaték akkor pozitív, ha az óramutató járásával ellentétes irányúnak látszanak a rajzon. A kiszámított v_1 és v_2 értékekből leolvashatjuk, hogy – mindkét megoldásban – a jobb oldali rúdnak az O pontra vonatkozó perdülete *negatív.* A bal oldali rúd a P pontban érintkezik a jobb oldali rúddal, és itt hátrafelé mutató (tehát negatív forgatónyomatékú) erőlökést kell kifejtenie a jobb oldali részre; csak ekkor lesz a jobb oldali rúd perdülete (az O pontra vonatkoztatva) az erőlökés után *negatív.*

A sebességek ismeretében kiszámíthatjuk, hogy a jobb oldali rúd szögsebessége az első esetnek megfelelő v_1 és v_2 mellett
$$\omega_2 = \frac{v_2 - v_1}{\ell} = -\frac{3v_0}{4\ell} < 0,$$
a második esetben pedig
$$\omega_2 = \frac{v_2 - v_1}{\ell} = \frac{3v_0}{7\ell} > 0.$$
Fentebb beláttuk, hogy a P pontban a jobb oldali rúdra hátrafelé mutató erőlökés hat, ez a rúd tömegközéppontjára vonatkozóan pozitív forgatónyomatékot eredményez, tehát a rúd szögsebessége is pozitív lesz a másik rúd másik végét érő hirtelen ütés után. Ez csak a második esetben teljesül, így most már határozottan kijelenthetjük, hogy a szabad végpont ténylegesen
$$v_2 = \frac{1}{7}v_0 = \frac{1}{7}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$
sebességgel indul el „előrefelé".

Bokor Endre (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. A két rúdból álló rendszer összes lendületének és a teljes mozgási energiájának kiszámításakor a Δt ideig ható erőt állandó nagyságúnak tekintettük. Be lehet látni, hogy az eredmény akkor sem változik meg, ha az erő az időnek tetszőleges módon változó $F(t)$ függvénye.