I. megoldás. Legyen $AB=a$ és $CD=c$. A CE_2F_1 és a CAB háromszögek hasonlóak, mivel $ACB\sphericalangle = E_2CF_1\sphericalangle$, valamint

$$\frac{CE_2}{CA}=\frac{CE_2}{CE_2+E_2A}=\frac{1}{\frac{CE_2+E_2A}{CE_2}}=\frac{1}{1+\frac{E_2A}{CE_2}}=\frac{1}{1+\frac{a}{c}}=\frac{1}{\frac{c+a}{c}}=\frac{c}{c+a}$$

és

$$\frac{CF_1}{CB}=\frac{CF_1}{CF_1+F_1B}=\frac{1}{\frac{CF_1+F_1B}{CF_1}}=\frac{1}{1+\frac{F_1B}{CF_1}}=\frac{1}{1+\frac{a}{c}}=\frac{1}{\frac{c+a}{c}}=\frac{c}{c+a}.$$

Így $\dfrac{E_2F_1}{AB}=\dfrac{CE_2}{CA}=\dfrac{c}{c+a}$, tehát $E_2F_1=\dfrac{c}{c+a}\cdot a=\dfrac{ac}{c+a}$.

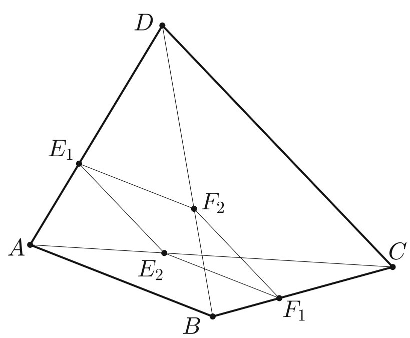
A fentiekhez hasonlóan $\dfrac{CE_2}{CA}=\dfrac{CF_1}{CB}=\dfrac{DE_1}{DA}=\dfrac{DF_2}{DB}$. Ezt és a megfelelő szögek egyenlőségét felhasználva:

(1) $$CE_2F_1\Delta\sim CAB\Delta,$$
(2) $$E_1AE_2\Delta\sim DAC\Delta,$$
(3) $$F_2BF_1\Delta\sim DBC\Delta,$$
(4) $$DE_1F_2\Delta\sim DAB\Delta.$$

(1) és (4) esetében a hasonlósági arány $\dfrac{c}{c+a}$, így $E_1F_2=E_2F_1=a\cdot\dfrac{c}{c+a}=\dfrac{ac}{c+a}$.

(2) és (3) esetében a hasonlósági arány $\dfrac{a}{c+a}$, így $E_1E_2=F_1F_2=c\cdot\dfrac{a}{c+a}=\dfrac{ac}{c+a}$.

Tehát $E_1E_2F_1F_2$ rombusz, ezért az átlói merőlegesek egymásra (*1. ábra*).

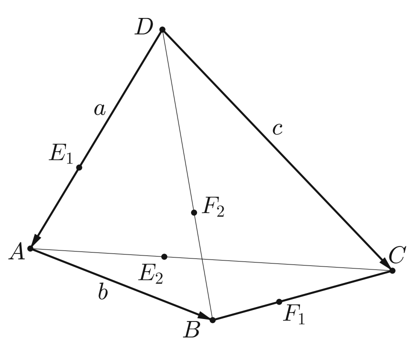


1. ábra

Lovas Márton (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 8. évf.)

II. megoldás. Célunk belátni, hogy az $\overrightarrow{E_1F_1}$ és $\overrightarrow{E_2F_2}$ vektorok merőlegesek egymásra, ami pontosan akkor teljesül, ha a skaláris szorzatuk 0.

Jelölje a $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}$ vektorokat rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$, illetve $\mathbf{b}$, hosszukat a megfelelő kisbetű; legyen továbbá $\dfrac{b}{b+c}=\beta$ (*2. ábra*).



2. ábra

Ekkor

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})-\mathbf{c},\quad \overrightarrow{BD}=-\mathbf{a}-\mathbf{b},\quad \overrightarrow{AC}=-\mathbf{a}+\mathbf{c},$$

ezért

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AE_2} &= \beta\overrightarrow{AC} = -\beta\mathbf{a} + \beta\mathbf{c},\\
\overrightarrow{AF_2} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF_2} = \mathbf{b} + \beta\overrightarrow{BD} = \mathbf{b} + \beta(-\mathbf{b} - \mathbf{a}) = -\beta\mathbf{a} + (1-\beta)\mathbf{b},
\end{aligned}$$

így $\overrightarrow{E_2F_2} = \overrightarrow{AF_2} - \overrightarrow{AE_2} = \big(-\beta\mathbf{a} + (1-\beta)\mathbf{b}\big) - (-\beta\mathbf{a} + \beta\mathbf{c}) = (1-\beta)\mathbf{b} - \beta\mathbf{c}$. Hasonlóan

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BF_1} &= \beta\overrightarrow{BC} = \beta(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}) = \beta\mathbf{c} - \beta(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = -\beta\mathbf{a} - \beta\mathbf{b} + \beta\mathbf{c},\\
\overrightarrow{BE_1} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE_1} = -\mathbf{b} - \beta\mathbf{a},
\end{aligned}$$

ezért $\overrightarrow{E_1F_1} = \overrightarrow{BF_1} - \overrightarrow{BE_1} = (1-\beta)\mathbf{b} + \beta\mathbf{c}$. Felírva $\overrightarrow{E_1F_1}$ és $\overrightarrow{E_2F_2}$ skaláris szorzatát:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{E_1F_1} \cdot \overrightarrow{E_2F_2} &= \big((1-\beta)\mathbf{b} + \beta\mathbf{c}\big)\big((1-\beta)\mathbf{b} - \beta\mathbf{c}\big) = (1-\beta)^2 b^2 - \beta^2 c^2 =\\
&= \left(\frac{b+c-b}{b+c}\right)^2 b^2 - \left(\frac{b}{b+c}\right)^2 c^2 = \frac{c^2b^2}{(b+c)^2} - \frac{b^2c^2}{(b+c)^2} = 0.
\end{aligned}$$

Tehát a két vektor skaláris szorzata 0, vagyis merőlegesek egymásra.