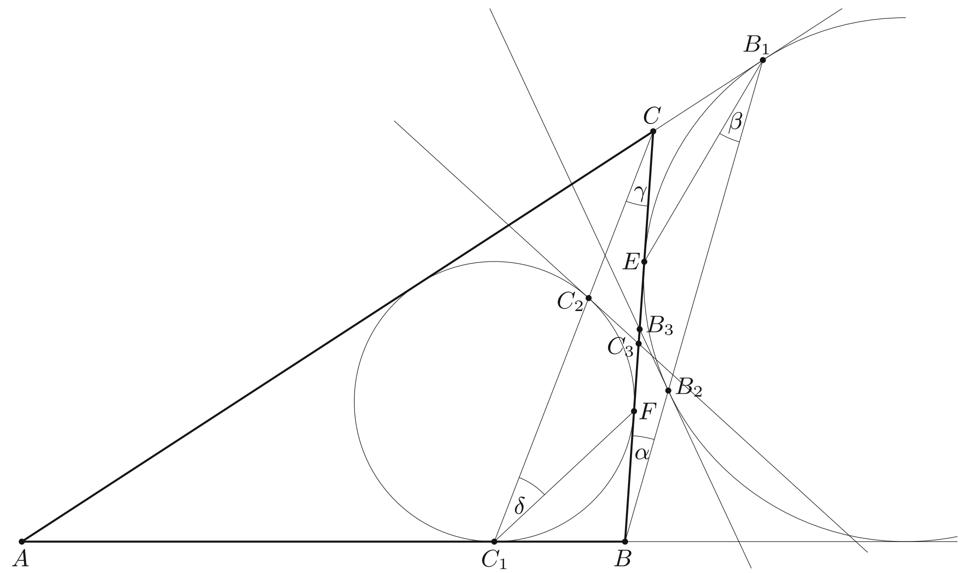
Az A-val szemközti hozzáírt kör és a beírt kör érintsék a BC oldalt rendre az E és F pontokban. Legyen $B_1BC\sphericalangle = \alpha$, $EB_1B_2\sphericalangle = \beta$. A $B_3EB_2\sphericalangle$ a hozzáírt körön a B_2E ívhez tartozó érintőszárú kerületi szög, így $B_3EB_2\sphericalangle = EB_1B_2\sphericalangle = \beta$, és hasonlóan $EB_2B_3\sphericalangle = \beta$. Így $BB_3B_2\sphericalangle = 2\beta$, ezért $BB_2B_3\sphericalangle = 180^\circ - \alpha - 2\beta$. Innen $EB_2B_1\sphericalangle = 180^\circ - BB_2B_3\sphericalangle - EB_2B_3\sphericalangle$ miatt $EB_2B_1\sphericalangle = \alpha + \beta$ adódik. Ez a hozzáírt körön a rövidebb EB_1 ívhez tartozó kerületi szög, ami egyenlő az ehhez az ívhez tartozó érintőszárú kerületi szögekkel, tehát $CEB_1\sphericalangle = CB_1E\sphericalangle = \alpha + \beta$, és így $B_1CE\sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$. Könnyű látni azt is, hogy $BB_1C\sphericalangle = EB_1B_2\sphericalangle + EB_1C\sphericalangle = \beta + (\alpha+\beta) = \alpha + 2\beta$.



Írjuk fel ezután a szinusztételt a BB_2B_3 és a BCB_1 háromszögekre:

$$\frac{BB_3}{B_3E} = \frac{BB_3}{B_3B_2} = \frac{\sin(180^\circ - \alpha - 2\beta)}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\alpha + 2\beta)}{\sin\alpha},$$
$$\frac{BC}{CB_1} = \frac{\sin(\alpha+2\beta)}{\sin\alpha};$$

ezekből $\dfrac{BB_3}{B_3E} = \dfrac{BC}{CB_1}$, így $\dfrac{BE}{B_3E} = \dfrac{BB_3 + B_3E}{B_3E} = \dfrac{BB_3}{B_3E} + 1 = \dfrac{BC}{CB_1} + 1$, ezért (a szokásos jelölésekkel)

$$B_2B_3 = B_3E = \frac{BE}{\frac{BC}{CB_1} + 1} = \frac{s-c}{\frac{a}{s-b} + 1}.$$

Hasonlóan, legyen $C_2CC_3\sphericalangle = \gamma$, $CC_1F\sphericalangle = \delta$. Ekkor a rövidebbik C_2F ívhez tartozó érintőszárú kerületi szögekként $C_3C_2F\sphericalangle = C_3FC_2\sphericalangle = \delta$, ezért $C_2C_3C\sphericalangle = 2\delta$, így $CC_2C_3\sphericalangle = 180^\circ - (\gamma + 2\delta)$,

$$C_1C_2F\sphericalangle = 180^\circ - CC_2F\sphericalangle = 180^\circ - (CC_2C_3\sphericalangle + \delta) =$$
$$= 180^\circ - \big(180^\circ - (\gamma + 2\delta) + \delta\big) = \gamma + \delta.$$

Innen $C_2FC_1\sphericalangle = 180^\circ - (\gamma + 2\delta)$, $BC_1F\sphericalangle = BFC_1\sphericalangle = \gamma + \delta$, tehát $BC_1C\sphericalangle = BC_1F\sphericalangle + \delta = \gamma + 2\delta$.

Írjuk fel a szinusztételt, ezúttal a CC_2C_3 és a CC_1B háromszögekre:

$$\frac{CC_3}{C_2C_3} = \frac{\sin(\gamma+2\delta)}{\sin\gamma}, \quad \frac{BC}{BC_1} = \frac{\sin(\gamma+2\delta)}{\sin\gamma},$$

ezért $\dfrac{CC_3}{C_3F} = \dfrac{CC_3}{C_2C_3} = \dfrac{BC}{BC_1}$, $\dfrac{CF}{C_3F} = \dfrac{CC_3 + C_3F}{C_3F} = \dfrac{CC_3}{C_3F} + 1 = \dfrac{BC}{BC_1} + 1$, így

$$C_2C_3 = C_3F = \frac{CF}{\frac{BC}{BC_1} + 1}.$$

Tehát

$$C_2C_3 = \frac{CF}{\frac{BC}{BC_1} + 1} = \frac{s-c}{\frac{a}{s-b} + 1} = B_2B_3.$$

Weisz Máté (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn., 11. évf.)