I. megoldás. Összesen $\binom{90}{2}=\frac{90\cdot 89}{2}=9\cdot 5\cdot 89=4005$-féleképpen választhatunk ki 2 számot a 90 darab kétjegyű szám közül.

A jó lehetőségeket számoljuk össze aszerint, hogy a közös számjegy mi.

Ha a közös számjegy 0, akkor a lehetséges számok, amik közül választottunk, a $10, 20, \ldots, 90$. Ez $\binom{9}{2}=36$ eset.

Ha a közös számjegy 1, akkor a lehetséges számok, amik közül választhatunk, a $10, 11, 12, \ldots, 19; 21, 31, \ldots, 91$. Vagyis $10+8=18$ számból választunk 2-t, amit $\binom{18}{2}=\frac{18\cdot 17}{2}=9\cdot 17=153$-féleképp tehetünk meg.

Ha a közös számjegy 2, akkor a lehetséges számok $20, 21, 22, \ldots, 29; 12, 32, \ldots, 92$. Ez szintén 18 szám, tehát itt is $\binom{18}{2}=153$-féleképp választhatunk.

Ugyanennyi eset van, ha a közös számjegy $3, 4, \ldots, 9$.

Duplán számoltuk azokat az eseteket, mikor a két kiválasztott szám egymás fordítottja: $\overline{ab}$ és $\overline{ba}$, ahol a két számjegy különböző. Ilyen eset $\binom{9}{2}=36$ van, hiszen a kilenc számjegyből kettőt választunk ki.

Tehát a jó lehetőségek száma:

$$36+9\cdot 153-36=9\cdot 153.$$

A kérdezett valószínűség:

$$p=\frac{9\cdot 153}{9\cdot 5\cdot 89}=\frac{153}{445}\approx 0{,}3438.$$

Feczkó Nóra (Budapest, Budai Ciszterci Szent Imre Gimn., 10. évf.) megoldása alapján

II. megoldás. Készítsünk egy gráfot, amelynek a csúcsai a kétjegyű pozitív egész számok, és két csúcs között akkor fusson él, ha a hozzájuk tartozó két számnak van közös számjegye. Ekkor a keresett valószínűség

$$P=\frac{\text{élek száma}}{\binom{90}{2}}.$$

Most számoljuk meg, hány éle van a gráfunknak. Ehhez 3 típusba osztjuk a csúcsokat:

1. típus: xx alakú csúcsok (azonos számjegyekből álló kétjegyű számok). Ilyen alakú számból 9 db van, és mindegyikből 17 él indul ki: az xy alakú csúcsokba, ahol $y\neq x$ tetszőleges számjegy (9 db) és az yx alakú csúcsokba, ahol $0\neq y\neq x$ tetszőleges számjegy (8 db).

2. típus: xy típusú csúcsok, ahol x, y különböző és $y\neq 0$ (és természetesen $x\neq 0$, hiszen kétjegyű számról van szó). Ilyen csúcsból $9\cdot 8=72$ db van, mindegyikből 33 él indul ki: az xz típusú csúcsokba, ahol $z\neq y$ tetszőleges számjegy (9 db), a zx típusúakba, ahol $0\neq z\neq x$ tetszőleges számjegy (8 db), az yz típusú csúcsokba, ahol $z\neq x$ tetszőleges számjegy (9 db) és a zy típusúakba, ahol $z\notin\{0, x, y\}$ tetszőleges számjegy (7 db).

3. típus: $x0$ alakú csúcsok (ahol $x\neq 0$, hiszen kétjegyű számokat vizsgálunk). 9 db ilyen szám van, mindegyik 25 másik csúccsal van összekötve: az $y0$ alakú csúcsokkal, ahol $0\neq y\neq x$ tetszőleges számjegy (8 db), az xy alakúakkal, ahol $0\neq y$ tetszőleges számjegy (9 db) és az yx alakú számokkal, ahol $0\neq y\neq x$ tetszőleges számjegy (8 db).

Azaz az élek száma:

$$\frac{9\cdot 17+72\cdot 33+9\cdot 25}{2}=1377.$$

Így a keresett valószínűség

$$P=\frac{1377}{4005}=\frac{153}{445}.$$

Azaz $\frac{153}{445}(\approx 0{,}3438)$ annak a valószínűsége, hogy a véletlenszerűen kiválasztott két számnak van közös számjegye.

III. megoldás. Számoljunk komplementer-módszerrel. Összesen $\frac{90\cdot 89}{2}=4005$-féleképpen választhatunk ki két kétjegyű számot. Ezek közül válasszuk ki azokat a párokat, amikben nincs közös számjegy. Négy esetet különböztetünk meg.

I. eset. Mind a 4 jegy különböző, és nincs közöttük 0. Ilyen esetből $\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{2}$ van, mert minden jegynek különböznie kell a többitől, és a két számot felcserélve is beleszámoltuk.

II. eset. Mind a 4 jegy különböző, és van közöttük 0. Ilyenből $9\cdot 8\cdot 7$ pár van, mert a 0 csak az egyesek helyén állhat, így kilenc darab szám, a kerek tízesek, lehet a pár egyik tagja, a másik tag két számjegye pedig a maradék számjegyek közül szabadon választható.

III. eset. A két szám közül az egyik 11-gyel osztható. Ilyenből $9\cdot 8\cdot 8$ van, mert 9 darab 11-gyel osztható kétjegyű szám van, a másik szám két jegye pedig a maradék jegyek közül választható (csak az első számjegy nem lehet 0).

IV. eset. Mindkét szám 11-gyel osztható. 9 darab 11-gyel osztható szám van, ezek közül $\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2}$-féleképpen választhatunk ki kettő különbözőt.

Az esetek között nincs átfedés, így a keresett valószínűség:

$$\frac{4005 - \left(\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{2} + 9\cdot8\cdot7 + 9\cdot8\cdot8 + \frac{9\cdot8}{2}\right)}{4005} =$$
$$= \frac{4005 - (1512 + 504 + 576 + 36)}{4005} = \frac{4005 - 2628}{4005} = \frac{1377}{4005}.$$

Hajós Balázs (Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyak. Gimn., 9. évf.)
megoldása alapján

IV. megoldás. 90 darab kétjegyű pozitív egész szám van. Ezek közül kettőt $\binom{90}{2} = \frac{90 \cdot 89}{2} = 4005$-féleképpen lehet kiválasztani.

A „kidobom a rosszat” elv alapján keressük azokat a párokat, melyeknek nincs közös számjegyük. Ehhez veszünk egy számot, és megnézzük, hány megfelelő párt találunk hozzá.

Három eset van.

1. eset. A kétjegyű szám $\overline{a0}$ alakú. Ekkor a számnak $8 \cdot 8 = 64$ olyan párja van, amellyel nincs közös számjegye. Ilyen alakú szám 9 db van, tehát ebben az esetben $9 \cdot 64 = 576$ számpárt találtunk.

2. eset. A kétjegyű szám $\overline{aa}$ alakú. Ekkor a számnak $8 \cdot 9 = 72$ olyan párja van, amellyel nincs közös számjegye, mivel a 0 nem állhat a tízes helyiértéken. Ilyen alakú szám is 9 db van. Tehát ebben az esetben $9 \cdot 72 = 648$ párt találtunk.

3. eset. A kétjegyű szám $\overline{ab}$ alakú. Ekkor a számnak $7 \cdot 8 = 56$ olyan párja van, amellyel nincs közös számjegye. Ilyen alakú szám $90 - 9 - 9 = 72$ db van. Tehát ebben az esetben $72 \cdot 56 = 4032$ párt találtunk.

Összesen $\frac{576 + 648 + 4032}{2} = 2628$ db pár van, mivel az összeszámolásnál mindegyik párt kétszer számoltuk. $4005 - 2628 = 1377$ olyan pár van, amelyben a kétjegyű számoknak van közös számjegye. Tehát a kérdezett valószínűség $\frac{1377}{4005} \approx 34{,}38\%$.

Németh Máté Előd (Révai Miklós Gimnázium, Győr, 10. évf.)

Megjegyzések. 1. Sokan nem vették figyelembe, hogy a két számot nyilvánvalóan egyszerre választjuk ki, tehát nem lehetnek egyformák.

2. Sokan pedig úgy tekintették, mintha egy számpárt kétféleképpen is választhatnánk, azaz az összes lehetőségek számát sem, illetve a jó lehetőségek számát sem osztották 2-vel. Ekkor ugyan a végeredmény végül helyes, ám a gondolatmenetben van hiba.

3. Sok-sok apró hiba volt, ezért a sok hiányos dolgozat.