I. megoldás. Megmutatjuk, hogy a kérdéses következtetés nem igaz. Rekurzívan felépítjük A-t, H-t, és az $E \neq E'$ eltoláshalmazokat (mind $\mathbb{R}$ nemüres részhalmazai), úgy, hogy

$$H = \bigcup_{e \in E} (A + e) = \bigcup_{e' \in E'} (A + e'),$$

és mind az $A + e = \{a + e \colon a \in A\}$ $(e \in E)$ eltoltak, mind az $A + e' = \{a + e' \colon a \in A\}$ $(e' \in E')$ eltoltak páronként diszjunktak.

Legyen először $A_1 = \{0\}$, $E_1 = \{0\}$, $E'_1 = \{1\}$, és $H_1 = (A_1 + E_1) \cup (A_1 + E'_1) = \{0, 1\}$. Innen rekurzívan haladunk tovább. Tegyük fel, hogy már megkonstruáltuk a véges A_n, E_n, E'_n halmazokat úgy, hogy $E_n \cap E'_n = \emptyset$, $A_n + E_n$ és $A_n + E'_n$ minden általuk lefedett elemet egyszer fednek (vagyis az $A + e$ $(e \in E_n)$ halmazok páronként diszjunktak, és az $A + e'$ $(e' \in E'_n)$ halmazok is páronként diszjunktak). Legyen ekkor $H_n = (A_n + E_n) \cup (A_n + E'_n)$. Most egymás után minden egyes $h \in H_n$ elemre a következőt tesszük: ha h eddig nem volt benne $A_n + E_n$-ben, akkor beteszünk A_n-be egy a, E_n-be egy e elemet, hogy azok összege éppen h legyen, és a korábbi tulajdonságok ne romoljanak el, azaz a ne legyen $a_1 + e_1 - e_2$ alakú (ahol ezek korábbi elemek: $a_1 \in A_n$, $e_1, e_2 \in E_n$), és e se legyen $e_1 + a_1 - a_2$ alakú (ahol $e_1 \in E_n$, $a_1, a_2 \in A_n$), sőt, az új e ne legyen E'_n-ben sem. Mindegyik feltétel véges sok elem letiltását jelenti. Ugyanígy járunk el $A_n + E'_n$ esetében is. Így kapjuk az $A_{n+1}, E_{n+1}, E'_{n+1}$ halmazokat, nyilván $H_n \subseteq A_{n+1} + E_{n+1}$, $H_n \subseteq A_{n+1} + E'_{n+1}$.

Világos, hogy $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $E' = \bigcup_{n=1}^{\infty} E'_n$, $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ megfelelnek, amennyiben a korlátosság is teljesül. Azonban a korlátosságot is könnyen betarthatjuk, ha minden új elemet a $(-2, 2)$ intervallumból választunk a következőképpen: egy tipikus lépésben egy adott $H_n \ni h \in (-2, 2) + (-2, 2) = (-4, 4)$ elemet akarunk felírni $a + e$ alakban, ahol $a \in A_{n+1}$, és $e \in E_{n+1}$ (vagy E'_{n+1}). Világos, hogy mivel csak véges sok letiltott elem van, léteznek ennek megfelelő $a, e \in (-2, 2)$ számok.

II. megoldás (Matolcsi Dávid dolgozata alapján). Legyen H a $(-2, 2)$ nyílt intervallumba eső, 3-hatvány nevezőjű racionális számok halmaza. Legyen $A \subset (-1, 1)$ a $\pm(1 - 3^{-r})$ alakú számok halmaza, ahol r nemnegatív egész. Be fogjuk látni, hogy H többféleképpen is felbontható A-nak páronként diszjunkt eltoltjaira.

Legyen E a $[-1, 1]$ zárt intervallumba eső, 3-hatvány nevezőjű racionális számok halmaza. Ekkor $A + E = \{a + e \colon a \in A,\ e \in E\} \subseteq H$ (itt valójában egyenlőség áll). Mivel A és $A + 2/3$ is tartalmazza a $2/3$ számot, ezért A-nak ez a két eltoltja nem diszjunkt. Elég belátni, hogy mindkettő kiegészíthető H felbontásává A-nak páronként diszjunkt eltoltjaira. Mivel H megszámlálható, elég belátni, hogy ha valamely $e_1, \ldots, e_n \in E$ számokkal képzett $A + e_i$ eltoltak nem tartalmazzák a $h \in H$ számot, akkor van olyan $e \in E$ szám, hogy az $A + e$ eltolt tartalmazza a h számot és diszjunkt $A + e_1, \ldots, A + e_n$ mindegyikétől.

Válasszuk az $r \geq 2$ egész számot olyan nagynak, hogy $3^{r-2}(h - e_i)$ egész legyen minden $i = 1, \ldots, n$ esetén, továbbá $3^{-r} \leq 2 - |h|$ álljon. Ekkor $|h| - (1 - 3^{-r}) \leq 1$, tehát tudunk olyan előjelet választani, hogy az $a = \pm(1 - 3^{-r})$ és $e = h - a$ választással $|e| \leq 1$, azaz $e \in E$ legyen. Ekkor $h = a + e \in A + e$.

Már csak azt kell belátnunk, hogy $b, c \in A$ és $1 \leq i \leq n$ esetén $b + e \neq c + e_i$, azaz $b + h - a \neq c + e_i$, vagyis $a - b + c \neq h - e_i$. Mivel $h \notin A + e_i$, ezért $h - e_i \notin A$, tehát $a = b$ vagy $a = -c$ esetén készen vagyunk, hiszen ekkor $a - b + c \in A$. (Utóbbi esetben használjuk, hogy az A halmaz a 0-ra szimmetrikus.) Egyéb esetben belátjuk, hogy $3^{r-2}(a - b + c)$ nem egész, amiből a kívánt nem-egyenlőség azonnal következik.

Legyen $b = \pm(1 - 3^{-s})$ és $c = \pm(1 - 3^{-t})$, ekkor $3^r(a - b + c) = \pm(3^r - 1) \mp (3^r - 3^{r-s}) \pm (3^r - 3^{r-t})$, ahol 3^r egy 9-cel osztható egész, $\mp 1 \pm 3^{r-s} \mp 3^{r-t}$ pedig nem, mert $\max(s, t) > r$ esetén ez vagy ∓ 1, vagy nem egész, $\max(s, t) \leq r$ esetén pedig vagy ∓ 3, vagy nem osztható 3-mal. Így tehát $3^r(a - b + c)$ nem lehet 9-cel osztható egész.