I. megoldás. Számoljuk meg kétféleképpen, hogy hány olyan (A, B, C) rendezett hármas van, melyre A és B az $\mathcal{F}$ halmazrendszer két különböző eleme, $C \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ pedig egy olyan nemüres részhalmaz, melyre az $A \cap C$ és $B \cap C$ halmazok elemszámának paritása különbözik.

(∗) Először is megjegyezzük, hogy bármely (véges) nemüres S halmaz részhalmazainak pontosan a fele páros, illetve páratlan méretű. Sőt, általánosabban, ha $T \supseteq S$ egy (véges) halmaz, akkor T részhalmazainak éppen a fele metszi (a nemüres) S-et páros, illetve páratlan elemszámú halmazban (hiszen S minden részhalmaza ugyanannyiféleképpen, $2^{|T \setminus S|}$-féleképpen, egészíthető ki T részhalmazává). Ezt az észrevételt a megoldás során többször is fel fogjuk használni.

Legyen $|\mathcal{F}| = t$. Először A és B megválasztásával kezdjük: A-ra t lehetőség van, ezután B-re $(t-1)$, hiszen $A \neq B \in \mathcal{F}$. Ezután pontosan azok a C nemüres halmazok megfelelők, melyek az $A \Delta B$ (nemüres) halmazt (vagyis A és B szimmetrikus differenciáját) páratlan sok elemben metszik. Ezt a feltételt (∗) alapján a részhalmazok fele teljesíti (és nincs köztük az $\emptyset$), így a megfelelő C halmazok száma 2^{n-1}. Tehát a megfelelő (A, B, C) hármasok száma $t(t-1)2^{n-1}$.

Most ugyanezt másféleképpen is megszámoljuk: először C-t választjuk meg, erre $(2^n - 1)$-féle lehetőség van. Ezután az olyan (A, B) párok lesznek megfelelők, melyekre $|A \cap C|$ és $|B \cap C|$ paritása különböző. Az $A \in \mathcal{F}$ halmaz tetszőlegesen megválasztható, majd ezután a feltétel szerint éppen $t/2$ esetben lesz $|B \cap C|$ paritása megfelelő (vagyis $|A \cap C|$ paritásától különböző). Így a hármasok száma $(2^n - 1)t(t/2)$.

A $t(t-1)2^{n-1} = (2^n - 1)t(t/2)$ (t-ben másodfokú) egyenlet megoldásai $t = 0$ és $t = 2^n$. Tehát az üres halmazon és az összes részhalmazt tartalmazó halmazrendszeren kívül nincs megfelelő $\mathcal{F}$.

Ez a két halmazrendszer pedig teljesíti a feltételeket: ha $\mathcal{F}$ az üres halmazrendszer, akkor $A \cap X$ elemszáma 0-szor lesz páros, 0-szor lesz páratlan; ha pedig $\mathcal{F}$ az összes részhalmazt tartalmazó halmazrendszer, akkor (∗) szerint bármely nemüres X-re $A \cap X$ elemszáma 2^{n-1} esetben páros, 2^{n-1} esetben páratlan.

Tehát két megfelelő halmazrendszer van: az üres halmaz és az $\{1, 2, \dots, n\}$ összes részhalmazát tartalmazó halmazrendszer.

II. megoldás (Fleiner Zsigmond és Velich Nóra megoldása alapján). Megmutatjuk, hogy csak az üres halmazrendszer és az összes részhalmazt tartalmazó halmazrendszer megfelelő.

Legyen ismét $|\mathcal{F}| = t$. Készítsünk egy $t \times 2^n$ méretű táblázatot, melynek sorai az $\mathcal{F}$-beli halmazoknak, oszlopai pedig az $\{1, 2, \dots, n\}$ részhalmazainak felelnek meg. Bármely $A \in \mathcal{F}$ és $X \subset \{1, 2, \dots, n\}$ halmazok esetén az A-nak megfelelő sor és az X-nek megfelelő oszlop közös mezőjébe írjunk $(+1)$-et, ha $|A \cap X|$ páros, illetve (-1)-et, ha $|A \cap X|$ páratlan. Ebben a táblázatban számítsuk ki a számok összegét kétféleképpen: oszloponként és soronként is.

A feltétel szerint bármely nemüres X esetén az $A \in \mathcal{F}$ halmazoknak pontosan a felére lesz $|A \cap X|$ páros, illetve páratlan, vagyis az X-nek megfelelő oszlopban a számok fele $+1$, fele -1; az összegük 0. Az üres halmaz minden $A \in \mathcal{F}$-et a páros üres halmazban metsz, tehát az üres halmaznak megfelelő oszlopban mind a t elem $+1$. Azt kaptuk, hogy a táblázatban az elemek összege t.

Ha $\emptyset \in \mathcal{F}$, akkor az $\emptyset$-nak megfelelő sorban csupa $+1$ áll, ezek összege 2^n. Tekintsünk most egy tetszőleges nemüres $A \in \mathcal{F}$ elemet és a neki megfelelő sort. Mivel az A nemüres, az $\{1, 2, \dots, n\}$ részhalmazaival vett metszeteinek éppen a fele páros, iletve páratlan; az ilyen sorokban az elemek összege 0. Összességében, a táblázat összege 2^n, ha $\emptyset \in \mathcal{F}$, és 0, ha $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

A kétféle összeszámolásból azt kaptuk, hogy $t = 0$ vagy $t = 2^n$, vagyis $\mathcal{F}$ az üres halmazrendszer, vagy pedig $\{1, 2, \dots, n\}$ összes részhalmazából áll. Azt, hogy ez a két halmazrendszer teljesíti a feltételeket, ugyanúgy ellenőrizhetjük, mint az I. megoldásban.