Elnevezés: Az $\binom{n}{k}$ kifejezésben n-re olykor számlálóként, k-ra pedig nevezőként hivatkozunk. Szükségünk lesz a következő becslésre: Legyenek a, b, y pozitív egész számok, melyekre $a > b$; ekkor: $\binom{a}{y} + \binom{b}{y} \geq \binom{a-1}{y} + \binom{b+1}{y}$.

Bizonyítás: ekvivalens átalakításokat hajtunk végre a bizonyítandó egyenlőtlenségen. Szorozzuk mindkét oldalt $(y!)$-sal:

$$a(a-1)(a-2)\dots(a-y+1) + b(b-1)(b-2)\dots(b-y+1) \geq$$
$$\geq (a-1)(a-2)(a-3)\dots(a-y) + (b+1)b(b-1)\dots(b-y+2).$$

Vonjuk ki a jobb oldalt és emeljünk ki:

$$\big(a-(a-y)\big)(a-1)(a-2)\dots(a-y+1)+$$
$$+\big((b-y+1)-(b+1)\big)b(b-1)\dots(b-y+2) \geq 0.$$

Végezzük el a kivonást és adjuk hozzá a negatív tagot:

$$y(a-1)(a-2)\dots(a-y+1) \geq yb(b-1)\dots(b-y+2).$$

Ez pedig egyenesen következik abból, hogy $a > b$, mert mindkét oldalon y pozitív szám szorzata áll, és a bal oldalon lévők páronként nagyobbak vagy egyenlők, mint a jobb oldalon lévők. Ezzel a lemmával a későbbiekben olyan összegeket tudunk alulról becsülni, ahol a binomiális tagok „számlálójában” lévő tagok összege adott. Fontos megjegyezni, hogy amit beláttunk 1-re (amennyivel „közelebb vittük egymáshoz” a két számlálót), az tetszőleges pozitív valós számra igaz, ez látszik a bizonyítás menetéből. Tehát valójában a számlálók átlagával tudunk alulról becsülni, és ez akárhány tagra igaz.

A feladat állításának bizonyítása: Vegyünk egy tetszőleges n pontú teljes gráfot. Legyen az élek színe kék és lila, és tegyük fel, hogy kékből van több vagy ugyanannyi, mint lilából. Legyen a kék élek száma $\frac{nk}{2}$ (itt k nem feltétlenül egész szám, de ez nem baj, és már most tudjuk, hogy $k \leq \frac{n-1}{2}$), az a lényeg, hogy egy csúcsból átlagosan k darab kék él indul ki. Ha egy csúcsból kiindul x kék él, akkor az a csúcs $\binom{x}{2}$ kék cseresznyének a gyökere (egy cseresznye egy kettő hosszú út, és gyökere az élek közös végpontja). Legyen a gráf i-edik csúcsából kiinduló kék élek száma A_i. Ekkor a gráfban van $\binom{A_1}{2} + \binom{A_2}{2} + \ldots + \binom{A_n}{2}$ kék cseresznye, ahol $A_1 + A_2 + \ldots A_n = nk$. Most alkalmazzuk a lemmát az $y = 2$ esetre, és megkapjuk, hogy van a gráfban legalább $n\binom{k}{2}$ kék cseresznye, hiszen mind az n számlálóba behelyettesítettük k-t, a számlálók átlagát. Ezt osszuk el az élek számával, és megkapjuk, hogy egy élen átlagosan

$$\frac{2\binom{k}{2}}{n-1}$$

cseresznye fekszik (egy cseresznye azon az élen fekszik, ami hiányzik a három pont által meghatározott háromszögből). Persze lehetséges, hogy néhány élen több, néhányon pedig kevesebb cseresznye fekszik, azonban a következő lépésből és a lemmából látni fogjuk, hogy akkor kapunk alsó becslést, ha az átlaggal számolunk. Szintén a lemmát alkalmazva kapjuk, hogy

$$\binom{\frac{2\binom{k}{2}}{n-1}}{2}$$

4 hosszú kék kör fekszik átlagosan egy élen mint a 4 hosszú kör „átlóján”. Ezt az élek számával beszorozva megkapjuk a 4 hosszú kék körök számát. Azonban így minden 4 hosszú kék kört kétszer számoltunk (mindkét átlójánál), ezért ezt el kell osztani 2-vel. Ebből azt kapjuk, hogy legalább

$$\binom{\frac{2\binom{k}{2}}{n-1}}{2} \cdot \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

4 hosszú kék kör van a gráfban. Teljesen megegyező gondolatmenettel kaphatjuk, hogy lila körből legalább

$$\binom{\frac{2\binom{n-1-k}{2}}{n-1}}{2} \cdot \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

darab van, hiszen az egy csúcsból kiinduló lila élek átlagos száma $n-1-k$. Konstans szorzótól eltekintve ezek is fix összegű számlálók azonos nevezőjű binomiális kifejezéseinek összegei, tehát alulról becsülhetjük az átlaggal: k és

$n-1-k$ átlaga éppen $\dfrac{n-1}{2}$, ezt behelyettesítve becsülhetjük a 4 hosszú körök számát:

$$2 \cdot \binom{\frac{2\binom{\frac{n-1}{2}}{2}}{n-1}}{2} \cdot \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

Ezt ekvivalens átalakítások sorozatával szebb alakra hozhatjuk:

$$\frac{n(n-1)(n-3)(n-7)}{64}.$$

Ez $n \geq 9$ esetén nagyobb a bizonyítandónál, hiszen $n(n-7) > (n-5)^2$ és $(n-1) > (n-5)$, valamint $(n-3) > (n-5)$ mind teljesül $n \geq 9$-re. Ha $n = 8$, akkor pedig $8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 1 > 64$. Ezzel a bizonyítandót beláttuk.

Várkonyi Zsombor (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)