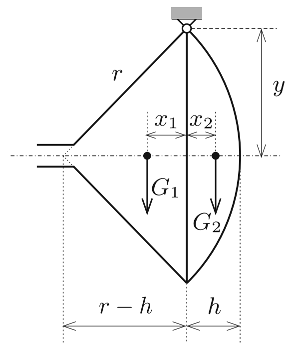
A rózsa két részre osztható fel; egy kúppalástra és egy gömbsüvegre. Egyensúly esetén a két rész súlyából adódó forgatónyomatékok kiegyenlítik egymást:

$$G_1 x_1 = G_2 x_2,$$

ahol G_1 és G_2 a részeknek (az $A_{1,2}$-vel jelölt felszínükkel arányos) súlya, x_1 és x_2 pedig az
pontjának az elválasztó síktól mért távolsága (lásd az *ábrát*). (Mivel a rózsa forgásszimmetr
nyilván a szimmetriatengelyen helyezkednek el.) Az egyensúly feltétele tehát így is felírható

$$A_1 x_1 = A_2 x_2. \tag{1}$$



A kúppalást felszíne (ha az alapkörének sugara y):

$$A_1 = \pi r y, \tag{2}$$

a tömegközéppontja pedig (lásd pl. a Függvénytáblázat 198. oldalát):

$$x_1 = \frac{r-h}{3}. \tag{3}$$

Egy r sugarú gömbfelületből kivágott, h vastagságú gömbsüveg felszíne (lásd pl. a Függvénytáblázat 66. oldalát)

$$A_2 = 2\pi r h, \tag{4}$$

a tömegközéppontjának távolsága a körlap középpontjától pedig

$$x_2 = \frac{h}{2}. \tag{5}$$

Ez utóbbi úgy látható be, hogy gondolatban szétvágjuk a h magas gömbsüveget nagyon sok, egyforma vastag gömbövre. Ezeknek a gömböveknek a felszíne, és emiatt a tömegük is ugyanakkora, tehát az egész gömbsüveg tömegközéppontja a „középső gömböv" középpontjában, a h felénél található.

Írjuk vissza (2)–(5) alapján számított értékeket (1)-be:

$$\pi r y \frac{r-h}{3} = 2\pi r h \frac{h}{2},$$

vagyis

$$y\,\frac{r-h}{3} = h^2. \tag{6}$$

Határozzuk meg y-t az ábrán látható derékszögű háromszögből:

$$y^2 = r^2 - (r-h)^2, \qquad \text{vagyis} \qquad y = \sqrt{h(2r-h)}.$$

Ezt (6)-ba helyettesítve a

$$\sqrt{h(2r-h)}\,\frac{r-h}{3} = h^2$$

egyenletet kapjuk. Ebből négyzetre emelés és algebrai átalakítások után következik, hogy

$$10\frac{h^3}{r^3} - 4\frac{h^2}{r^2} + 5\frac{h}{r} - 2 = 0.$$

Ez az $x \equiv h/r$ arányra nézve harmadfokú egyenlet:

$$10x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \equiv (5x-2)(2x^2+1) = 0,$$

aminek egyik gyöke $x = 2/5$, a másik két gyöke pedig nem valós.

Az egyensúlyban lévő test tengelye tehát $h/r = 2/5$ arány esetén lesz vízszintes.

Fülöp Sámuel Sihombing (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 12. évf.)

Megjegyzések. 1. Ha a fenti gondolatmenet helyett már a megoldás elején azt tételezzük fel, hogy a rózsa két részének tömege megegyezik, vagyis hogy $G_1 = G_2$, akkor az egyensúly feltétele $x_1 = x_2$ lesz. Ez a h/r arányra egy elsőfokú egyenletet jelent:

$$\frac{r-h}{3} = \frac{h}{2},$$

aminek megoldása: $h/r = 2/5$. Visszahelyettesítéssel megkapjuk, hogy ilyen arányszám esetén $A_1 = A_2$, vagyis a kezdeti feltevésünk helyes volt. Ez azonban nem bizonyítja, hogy más arányszám esetén nem lehet egyensúlyban a test a vízszintes tengelyállás mellett. A két félrész tömege (és súlyponttávolsága) általában különbözik egymástól, és csak $h/r = 2/5$ aránynál egyeznek meg.

2. Több versenyző a forgásszimmetriára hivatkozva azt állította, hogy az egyensúly feltétele ugyanaz, mint ami a kétdimenziós esetben lenne, amikor az alakzat egy háromszögből és egy körcikkből állna. Ez azonban *hibás* állítás!

3. Érdekes, hogy a háromdimenziós esetben (vagyis egy tömör kúp és egy gömbszelet összeillesztésénél) is $h/r = 2/5$ aránynál lesz a tengely egyensúlyi helyzete vízszintes.