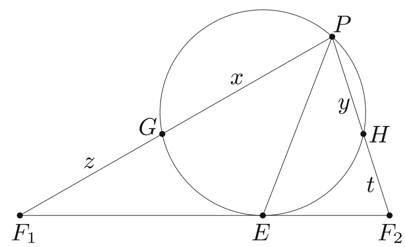
Legyen $PG = x$, $PH = y$, $GF_1 = z$, $HF_2 = t$. A szokásos jelölésekkel $F_1F_2 = 2c$, $PF_1 + PF_2 = 2a$, ahol $2a$ az ellipszis nagytengelyének, $\sqrt{a^2 - c^2} = b$ pedig a fél kistengelyének a hossza. A szögfelező-tétel alapján

$$F_1E = 2c \cdot \frac{x+z}{x+z+y+t} = 2c \cdot \frac{x+z}{2a}, \quad \text{és}$$
$$F_2E = 2c \cdot \frac{y+t}{x+z+y+t} = 2c \cdot \frac{y+t}{2a}.$$




Az $F_1$, illetve az $F_2$ pontnak a körre vonatkozó hatványa:

$$z(x+z) = F_1E^2 = \left(2c \cdot \frac{x+z}{2a}\right)^2, \quad \text{illetve} \quad t(y+t) = F_2E^2 = \left(2c \cdot \frac{y+t}{2a}\right)^2.$$

Innen

$$z = (x+z)\frac{c^2}{a^2} \quad \text{és} \quad t = (y+t)\frac{c^2}{a^2},$$

azaz egyrészt

$$x\frac{c^2}{a^2} = z\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = z\frac{b^2}{a^2}, \quad \text{így} \quad x = z\frac{b^2}{c^2};$$

másrészt hasonlóan

$$y\frac{c^2}{a^2} = t\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = t\frac{b^2}{a^2}, \quad \text{így} \quad y = t\frac{b^2}{c^2}.$$

Innen $\dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{t} = \dfrac{x+z}{y+t}$, tehát a $PGH$ háromszög hasonló a $PF_1F_2$ háromszöghöz, a hasonlóság aránya

$$\frac{x}{x+z} = \frac{z\frac{b^2}{c^2}}{z\frac{b^2+c^2}{c^2}} = \frac{b^2}{b^2+c^2}.$$

Ezért

$$GH = F_1F_2 \cdot \frac{b^2}{b^2+c^2} = 2c \cdot \frac{b^2}{b^2+c^2},$$

ami valóban független a $P$ pont választásától.

*Geretovszky Anna* (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn., 11. évf.)