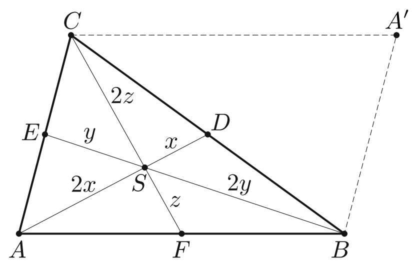
Tükrözzük az A csúcsot a D pontra, a tükörképet jelölje A'. Mivel AA' és BC a D pontban felezik egymást, ezért $ABA'C$ paralelogramma.
A paralelogramma-tételt felírva kapjuk, hogy

$$AA'^2 + BC^2 = AB^2 + BA'^2 + A'C^2 + CA'^2.$$

A háromszög oldalait és súlyvonalait a szokásos módon jelölve és kihasználva, hogy $AB = CA'$ és $BA' = AC$ kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(2s_a)^2 + a^2 &= c^2 + b^2 + c^2 + b^2,\\ 4s_a^2 &= 2b^2 + 2c^2 - a^2,\\ s_a &= \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{2}}.\end{aligned}$$



Hasonló a képlet s_b-re és s_c-re. A képletekből látható, hogy ha egy oldal legalább akkora, mint egy másik, akkor a hozzá tartozó súlyvonal legfeljebb akkora, mint a másikhoz tartozó. Az is következik, hogy ha az a-hoz és b-hez tartozó súlyvonal hossza egyenlő, akkor $a = b$, hiszen felírva a képletet a két súlyvonalra, és egyenlővé téve őket, majd négyzetre emelve és rendezve azt kapjuk, hogy $a^2 = b^2$.

Legyen az a-hoz tartozó súlyvonal hossza $3x$, a b-hez tartozó $3y$, a c-hez tartozó pedig $3z$. A súlypont harmadolja a súlyvonal háromszögbe eső szakaszát, tehát az egyes háromszögek kerületeit fel tudjuk írni ezeknek a szakaszoknak a segítségével.

A szimmetria miatt feltehetjük, hogy a-nál nincs hosszabb oldal. Ezután két esetet különböztetünk meg: $b \geq c$ és $b \leq c$.

Kezdjük az első esettel. Ekkor tehát $a \geq b \geq c$. Ennek alapján $x \leq y \leq z$. Tudjuk, hogy az AFS és CES háromszögek kerülete egyenlő. Az AFS háromszög kerülete $\frac{c}{2} + z + 2x$, a CES háromszögé pedig $\frac{b}{2} + y + 2z$. Tudjuk továbbá, hogy

$$\frac{c}{2} \leq \frac{b}{2}, \quad z \leq z, \quad x \leq y, \quad x \leq z.$$

Ezt a négy egyenlőtlenséget összeadva azt kapjuk, hogy AFS kerülete legfeljebb akkora, mint CES kerülete. Viszont a feladat szövege szerint ezek egyenlőek, ami pedig csak akkor lehet, ha minden egyenlőtlenségben az egyenlőség esete teljesül. Tehát $\frac{c}{2} = \frac{b}{2}$, vagyis $c = b$; és $x = y$, vagyis a második bekezdés értelmében ekkor $a = b$. Tehát $a = b = c$, a háromszög szabályos.

A másik eset nagyon hasonló. Ekkor $a \geq c \geq b$, emiatt $x \leq z \leq y$. Ebben az esetben a feladat szövege alapján az AFS háromszög kerülete $\left(\frac{c}{2} + 2x + z\right)$ megegyezik a BDS háromszög kerületével $\left(\frac{a}{2} + x + 2y\right)$. Felírva, majd összeadva az

$$\frac{a}{2} \geq \frac{c}{2}, \quad x \geq x, \quad y \geq x, \quad y \geq z$$

egyenlőtlenségeket, azt kapjuk, hogy BDS kerülete legalább akkora, mint AFS kerülete, és egyenlőség csak akkor lehet, ha minden egyenlőtlenségnél az egyenlőség esete áll fenn. Ekkor pedig $a = c$; és $y = z$, amiből következik, hogy $b = c$. Tehát $a = b = c$, vagyis a háromszög szabályos.

Mindkét esetben azt kaptuk, hogy ha a feltétel igaz, akkor a háromszög biztosan szabályos.

Dobák Dániel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn. , 12. évf.)