

Mivel a gömbök egymástól nagyon távol helyezkednek el, az egyes töltések körüli térben a másik töltés által okozott torzulás elhanyagolhatóan kicsi. Ebben a közelítésben mindkét töltés közelében az elektromos erőter gömbszimmetrikus Coulomb-tér, csak a vezető gömbhéjak belsejében különbözik attól: ott (egy-egy d vastagságú rétegben) az elektromos térerősség *nulla*.

Számítsuk ki az eletrosztatikus tér energiáját az eredeti és a felcserélt töltések esetében is. A kezdeti és a végállapot energiájának különbsége megadja a töltések felcseréléséhez szükséges minimális munka nagyságát.

Számítsuk ki, hogy mekkora az elektrosztatikus tér energiája akkor, ha két távoli, q_1 és q_2 nagyságú töltés körül egy-egy d vastagságú, r_1 és r_2 belső sugarú vezető gömbhéj található. Legyen az energia nullszintje az egymástól távoli két töltés terének energiája a fémgömbhéjak nélkül. (Ilyen választás mellett a gömbhéjakat tartalmazó elrendezés energiája negatív.)

Ismert, hogy egy V térfogatú térrészben az elektrosztatikus energia $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \cdot V$, amennyiben a térrészben $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ nagysága mindenhol ugyanakkora. Mivel a gömbhéjakat tartalmazó és a gömbhéjak nélküli eset között csak annyi különbség, hogy az utóbbinál „hiányzik” a két gömbhéj belsejéhez tartozó energia, a minket érdeklő esetben tehát a rendszer energiája

$$W = -\frac{d}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1^2}{r_1^2} + \frac{q_2^2}{r_2^2} \right).$$

A fenti összefüggés levezetésekor kihasználtuk, hogy a q_1 töltés körüli gömbhéj térfogata

$$V_1 \approx 4\pi r_1^2 d,$$

és benne az állandó nagyságúnak tekinthető térerősség

$$E_1 \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2},$$

illetve a másik gömbhéj térfogata

$$V_2 \approx 4\pi r_2^2 d,$$

és benne a térerősség nagysága

$$E_2 \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{r_2^2}.$$

A kezdeti állapotban

$$q_1 = 2Q, \quad r_1 = R, \quad \text{illetve} \quad q_2 = Q, \quad r_2 = 3R,$$

tehát

$$W_{\text{kezdeti}} = -\frac{37}{72} \frac{d}{\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{R^2},$$

a töltések felcserélése után pedig

$$q_1 = Q, \quad r_1 = R, \quad \text{illetve} \quad q_2 = 2Q, \quad r_2 = 3R,$$

így

$$W_{\text{végső}} = -\frac{13}{72} \frac{d}{\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{R^2}.$$

A töltések felcseréléséhez szükséges munka legalább

$$W_{\text{felcserélési}} \geq W_{\text{végső}} - W_{\text{kezdeti}} = +\frac{d}{3\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{R^2}.$$

Bokor Endre (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) és
Marozsák Tádé (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 11. évf.)
 dolgozata alapján