Először is vegyük észre, hogy ha egy megfelelő kitöltés esetén a táblázat minden elemét (a „szélét”, azaz az első és utolsó sort és oszlopot is) megszorozzuk egy konstanssal, akkor az így kapott táblázat is teljesíti a feladat feltételét (azaz minden belső szám a négy szomszédja átlaga). Valamint két megfelelő kitöltés összege is megfelelő kitöltés (az összegzést itt is elvégezve a táblázat szélén is).

Másodszor azt látjuk be, hogy bármely megfelelő kitöltés esetében a legnagyobb abszolút értékű tag csak a táblázat szélén szerepelhet – kivéve, ha a táblázat minden tagja azonos (beleértve a széleket is). Tegyük fel, hogy a táblázat belsejében van egy érték, mely a legnagyobb abszolút értékkel rendelkezik. Ez a szám csak úgy lehet a négy szomszédja átlaga, ha mind a négy szám megegyezik vele. Ugyanez igaz erre a négy szomszédra, azok összesen 8 darab (hacsak nem értünk már ki a szélre) szomszédjára, és így tovább, mindegyik érintett számból minden irányban továbbhaladva, egészen addig, amíg a teljes táblázatot le nem fedtük, a szélekkel együtt. Tehát ugyanaz az érték szerepel mindenhol (a széleket is beleértve).

A fentiekből az is látszik, hogy egyetlen megoldás lehet a szélek adott kitöltése esetén, hiszen ha lenne két megoldás, akkor ezek különbségére is teljesülne a feladat követelménye, viszont a különbségnél a széleken csupa nulla van. Így ennél nagyobb abszolút értékű szám nem szerepelhet a táblázatban, azaz a különbség minden száma nulla, vagyis a két kitöltés azonos.

Végül azt látjuk be, hogy mindig létezik megfelelő kitöltés. Ezt egy viszonylag egyszerű esetre látjuk be, amikor a táblázat szélének egyetlen tagja nem nulla, és ez a tag pont 1. Ha ezt beláttuk, akkor ezen táblázatok lineáris kombinációja a szélek tetszőleges kitöltését megadja, így az ilyen speciális táblázatok megoldásainak fentivel azonos lineáris kombinációja kiadja a megoldást a szélek adott kitöltésére az első pontban belátottak miatt.

Ehhez tegyük azt, hogy először a táblázat belsejébe csupa nullát írunk, ez lesz az A_1 táblázat. A második lépésben minden belső mezőbe a négy szomszédja átlagát írjuk (a széleken lévő értékeket természetesen nem változtatjuk); így kapjuk az A_2 táblázatot. Ugyanezt a lépést ismételgetve kapjuk az A_3, A_4 stb. táblázatokat. Az első lépésben egyetlen szám értéke fog változni, a szélen lévő 1-es érték szomszédja 0-ról $\dfrac{1}{4}$-re nő, az összes többi érték marad 0. Teljes indukcióval látszik, hogy egy lépés során a táblázat egyetlen értéke sem csökkenhet (hiszen az előző lépésben sem csökkent egyetlen érték sem, és nem kisebb számok átlaga sem lesz kisebb a korábbi átlagnál). Azt is tudjuk, hogy ezen táblázatok egyetlen belső számának értéke sem lehet soha 1, vagy annál több (a megoldás második pontja miatt). Azaz az egymás utáni táblázatok minden adott helyen lévő értéke egy monoton növő, korlátos sorozatot alkot, ami így konvergens lesz. És mivel a határértékek átlaga megegyezik az átlag határértékével, így az $A_1, A_2, \ldots$ táblázatok határértéke a speciális feladat megoldása lesz.

Ezzel bebizonyítottuk az utolsó bizonyítandó állítást, tehát a feladat állítását is igazoltuk.

Sebestyén Pál Botond (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 9. évf.)

Megjegyzés. A megoldás mindkét része erősen támaszkodik a valós számok rendezhetőségére (és a rendezés teljességére). Mivel a feladat követelménye csupán a számokkal végzendő alapműveletekről szól, jogosan vetődik fel a kérdés, vajon érvényben marad-e valami a feladat állításából, ha a valós számok helyett egy nem rendezhető test elemeivel töltjük ki a táblázatot.

Ha valós számok helyett komplex számok szerepelnek, akkor a beírt számok valós és képzetes részeivel kapott táblázatokra külön-külön alkalmazható a valós esetre adott bizonyítás, így ebben az esetben a feladat mindkét állítása igaz marad. Második próbálkozásként tekintsük a háromelemű $T = \{0, 1, 2\}$ testet a modulo 3 összeadás és szorzás műveletével. Mivel T-ben $3 = 1 + 1 + 1 = 0$, itt négy szám átlaga a számok összegével egyenlő. Tekintsük itt a levágott sarkú 4×3-as táblázatot, aminek szélső soraiban és oszlopaiban minden mezőbe nullát írtunk. A belső két mező mindegyikébe szintén nullát írva megfelelő kitöltést kapunk, de megfelel az a kitöltés is, ha a két belső mezőbe 1-es kerül: ezek mindegyikének három 0 és egy 1-es szomszédja van, amelyek átlaga e számok összege: $0 + 0 + 0 + 1 = 1$; így ez is egy megfelelő kitöltés, tehát az egyértelműség ekkor nem teljesül.

Továbbra is 4×3-as táblázatot és a T test elemeit használva írjunk az első (külső) sor üres mezőjébe 1-et, a többi szélső sor és oszlop mezőibe pedig nullákat. A középső (belső) oszlop két mezőjébe (az 1-es alá) írandó értékeket jelölje rendre x és y. Az x szomszédai 0, 1, 0 és y lévén $x = 0 + 1 + 0 + y = 1 + y$ szükséges. Hasonlóan, y szomszédai 0, x, 0 és 0 lévén $y = 0 + x + 0 + 0 = x$-nek is teljesülnie kellene, ezekből viszont $x = 1 + y = 1 + x$ következik, ami ellentmondás. Tehát ebben az esetben a táblázatnak nem létezik a feladat követelményeinek megfelelő kitöltése.