I. megoldás. Az $x=1$-re nyilván $y=1$ megfelelő. Ha $x>1$ és páratlan, akkor legyen $y=x-1$; ekkor

$$x+y+1=2x \mid 2x^3-3(x-1)x=x^3+(x-1)^3+1=x^3+y^3+1.$$

Végül, ha x páros, akkor legyen $y=x+1$. Ekkor

$$\begin{aligned}x+y+1&=x+(x+1)+1=\\&=2(x+1) \mid (x+1)(2x^2+x+2)=2x^3+3x^2+3x+2=\\&=x^3+(x+1)^3+1=x^3+y^3+1.\end{aligned}$$

Legyen ezután x tetszőleges pozitív egész. Mivel

$$x^3+y^3+1=(x+y+1)\big(y^2-(x+1)y+(x+1)^2\big)+x^3+1-(x+1)^3,$$

azért $x+y+1 \mid x^3+y^3+1$ esetén $x+y+1 \mid x^3+1-(x+1)^3$. Az utóbbi egész szám semmilyen pozitív egész x-re nem lehet 0 (hiszen két szomszédos pozitív köbszám különbsége nagyobb, mint 1), ezért csak véges sok osztója van. Tehát nincs olyan pozitív egész x, amelyhez végtelen sok megfelelő y tartozna.

Csertán András (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. Az $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ azonosság miatt

$$(x+1)+y \mid (x+1)^3+y^3=(x^3+y^3+1)+(3x^2+3x).$$

Így y pontosan akkor teljesíti a feladat feltételét, ha $3x^2+3x=3x(x+1)$ osztható $x+y+1$-gyel. Ez pedig teljesül, ha $y=2x-1$, hiszen akkor

$$x+y+1=3x \mid 3x(x+1).$$

Az is látszik, hogy a 0-tól különböző $3x(x+1)$-nek csak véges sok osztója van, ezért $x+y+1$ csak véges sok megfelelő értéket vehet fel, tehát y is.

Ajtai Boglárka (Miskolc, Földes F. Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. Használjuk fel az $x^3+y^3+1=(x+y+1)(x^2-xy-x+y^2-y+1)+3xy$ azonosságot. A feladat feltétele ekkor $x+y+1 \mid 3xy$. A véges sok megfelelő tulajdonságú y létezése abból is következik, hogy ha (adott x mellett) $y>3x^2+2x-1$, akkor $3xy>3xy-y+3x^2+2x-1=(x+y+1)(3x-1)$ szerint $\dfrac{3xy}{x+y+1}>3x-1$, másrészt a nyilvánvalóan teljesülő $y<x+y+1$ egyenlőtlenség miatt $\dfrac{3xy}{x+y+1}<3x$. Így ilyenkor $\dfrac{3xy}{x+y+1}$ két szomszédos egész szám közé esik, tehát nem lehet egész.

Győrffy Ágoston (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)