

I. megoldás. Jelölje az első egyenletet (1), a másodikat (2), a harmadikat pedig (3). A (3)-at az (1)-be beírva adódik, hogy $yz \cdot y = z$. Ha $z \neq 0$, akkor mindkét oldalt z -vel osztva ebből $y^2 = 1$ következik.

1. eset. $y = 1$. Ekkor (1) alapján $x = z$, és így (2)-ből $x^2 = 1$.

Ha $x = 1$, akkor (1) miatt $z = 1 \cdot 1 = 1$. Ha $x = -1$, akkor szintén (1) alapján $z = -1 \cdot 1 = -1$.

2. eset. $y = -1$. Ekkor (1)-ből $-x = z$, és így (2) miatt $-x^2 = -1$, vagyis $x^2 = 1$.

Ha $x = 1$, akkor (1) miatt $z = 1 \cdot -1 = -1$. Ha pedig $x = -1$, akkor szintén (1) alapján $z = -1 \cdot -1 = 1$.

Végül, ha $z = 0$, akkor (2) miatt $y = 0$, (3) miatt pedig $x = 0$.

A megoldások tehát:

x	1	-1	1	-1	0
y	1	1	-1	-1	0
z	1	-1	-1	1	0

Selmi Bálint (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. Könnyen látható, hogy ha x, y, z megoldás, akkor $|x|, |y|, |z|$ is megoldás. Az is világos, hogy ha valamelyik ismeretlen értéke 0, akkor a többi is; pl. $x = 0$ esetén $y = xz = 0 = xy = z$. A pozitív megoldásokat keresve szorozzuk össze a három egyenletet; kapjuk, hogy $(xy)(xz)(yz) = zyx$, azaz $(xyz)^2 = xyz$, ezért ilyenkor $xyz = 1$. Az általánosság sérelme nélkül feltehetjük, hogy $x \geq y \geq z$. Ekkor viszont $x \geq 1 \geq z$ miatt $x = yz \leq y$, így $x = y$. Hasonlóan $z = xy \geq y$ szerint $y = z$, tehát $x = y = z = 1$ az egyetlen pozitív megoldás. A többi nemnulla megoldás ettől előjelekben különbözhet csak, mégpedig úgy, hogy az egyik ismeretlen 1, a másik kettő pedig -1 .

Megjegyzések. 1. Többen – a netes megoldáshoz hasonlóan – a három egyenletet összeszorozták, és az így kapott $(xyz)^2 = xyz$ egyenletből jutottak eredményre. Sokan pedig a szimmetriát kihasználva az $x = \pm 1, y = \pm 1$ és $z = \pm 1$ lehetőségeket vizsgálták, az eseteket leszűkítve annak segítségével, hogy csak páros darab negatív szám lehet a változók között.

2. Nagyon sokan úgy osztottak valamelyik változóval, hogy nem kötötték ki, hogy az nem lehet 0. Közülük legtöbben így nem kapták meg az $x = y = z = 0$ megoldást, sokan pedig csak úgy odaírták, hogy az is megoldás. Többen csak egész számokra oldották meg a feladatot, holott ez nem volt benne a feladat szövegében.