Először vizsgáljuk meg, hogy a gyökjel alatt álló tört milyen valós x-ekre lesz nagyobb vagy egyenlő, mint 0. Ez csak akkor lehet, ha mindkettő pozitív vagy negatív (a számláló lehet 0 is, a nevező viszont nem).

A számláló és a nevező is szorzattá alakítható:

$$x^2+2x-3=(x-1)(x+3),$$
$$x^2-2x-3=(x+1)(x-3).$$

Ha az ezekből adódó függvényeket ábrázoljuk, látható, hogy a megoldások csak a $(-\infty;-3]$, a $(-1;1]$, illetve a $(3;\infty)$ intervallumokból kerülhetnek ki. Induláskor megengedhetjük, hogy a számláló 0 legyen, de mivel ekkor az egyenlet jobb oldala nem 0, ezért sem az $x=-3$, sem az $x=1$ nem gyöke az egyenletnek.

Ezek után szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát (x^2-2x-3)-mal.

Két eset lehetséges: ha negatív, illetve ha pozitív számmal szoroztunk. Vizsgáljuk részletesen először azt az esetet, amikor x^2-2x-3 pozitív. Ekkor tudjuk, hogy $x>3$, vagy $x<-1$. Beszorzás és rendezés után azt kapjuk, hogy:

$$(x^2+2x-3)(x^2-2x-3)-\sqrt{(x^2+2x-3)(x^2-2x-3)}-2=0.$$

Legyen $a=\sqrt{(x^2+2x-3)(x^2-2x-3)}$. Így az egyenlet a következő lesz:

$$a^2-a-2=0.$$

Ennek gyökei: $a_1=2$ és $a_2=-1$. A második gyök nem megfelelő, hiszen a gyökös kifejezés csak pozitív lehet. Ebből az következik, hogy $a^2=4$. Tehát a megoldandó egyenlet a következő lesz:

$$(x^2+2x-3)(x^2-2x-3)=4.$$

Ha kibontjuk és 0-ra rendezzük az egyenletet azt kapjuk, hogy:

$$x^4-10x^2+5=0.$$

Ez x^2-re másodfokú:

$$x_{1,2}^2=5+2\sqrt5 \quad \text{és} \quad x_{3,4}^2=5-2\sqrt5\,.$$

Ezekből négy gyököt kapunk:

$$x_1=\sqrt{5+2\sqrt5}\,,\quad x_2=-\sqrt{5+2\sqrt5}\,,\quad x_3=\sqrt{5-2\sqrt5}\,,\quad x_4=-\sqrt{5-2\sqrt5}\,.$$

Közülük azonban csak kettő esik megfelelő intervallumba, így csak az $x_1=\sqrt{5+2\sqrt5}$ és az $x_2=-\sqrt{5+2\sqrt5}$ megoldásai az eredeti egyenletnek.

Most nézzük meg, mi történik akkor, ha a nevező, amivel szorzunk negatív. Mivel a gyökjel alatt pozitív szám (vagy 0) lehet, ezért az x^2+2x-3 is negatív. Ekkor az egyenlet úgy néz ki, hogy (-1)-et kiemelve tudjuk az (x^2-2x-3)-at a gyökjel alá vinni:

$$(x^2+2x-3)(x^2-2x-3)+\sqrt{(x^2+2x-3)(x^2-2x-3)}-2=0.$$

Így a gyökjel alatt két negatív szám szorzata áll, ami adhat újabb megoldásokat. Ismét új ismeretlent bevezetve: legyen $b=\sqrt{(x^2+2x-3)(x^2-2x-3)}$. A kapott egyenlet most

$$b^2+b-2=0.$$

Ennek pozitív megoldása csak $b=1$ (a $b=-2$ értéket nem veheti fel a gyökös kifejezés). A megoldandó egyenlet az lesz, hogy:

$$x^4-10x^2+8=0.$$

Ezt x^2-re megoldva kapjuk, hogy:

$$x_1^2=5+\sqrt{17} \quad \text{és} \quad x_2^2=5-\sqrt{17}\,.$$

Ebből azt a 4 gyököt kapjuk, hogy:

$$x_1=\sqrt{5+\sqrt{17}}\,,\quad x_2=-\sqrt{5+\sqrt{17}}\,,\quad x_3=\sqrt{5-\sqrt{17}}\,,\quad x_4=-\sqrt{5-\sqrt{17}}\,.$$

Ezek közül csak kettő esik megfelelő intervallumba, az $x_3=\sqrt{5-\sqrt{17}}$ és az $x_4=-\sqrt{5-\sqrt{17}}\,$.

Tehát az eredeti egyenletnek összesen 4 gyöke van:

$$x_1=\sqrt{5+2\sqrt5}\,,\quad x_2=-\sqrt{5+2\sqrt5}\,,\quad x_3=\sqrt{5-\sqrt{17}}\,,\quad x_4=-\sqrt{5-\sqrt{17}}\,.$$

Major Botond (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A leggyakrabban előforduló hiba a dolgozatokban és általában is az, hogy azt a két megoldást is adó esetet figyelmen kívül hagyják, amikor mindkét másodfokú kifejezés negatív értéket vesz fel.