A kétszeres szögeke vonatkozó $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ azonosságot $2\cos^2 x = \cos\ 2x + 1$ formában tagonként alkalmazva kapjuk, hogy

$$2\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2\left(\alpha+\frac{2k\pi}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}2\cos^2\left(\alpha+\frac{2k\pi}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(2\alpha+\frac{4k\pi}{n}\right)+1\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(2\alpha+\frac{4k\pi}{n}\right)\right)+n.$$

Pontosan azt kell megmutatnunk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(2\alpha+\frac{4k\pi}{n}\right)\right)=0.$$

A megoldás további részében a komplex számok trigonometrikus alakját használjuk. Legyen

$$z=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Ekkor algebrai azonosság alapján

$$\frac{\cos(4\pi)+i\cdot\sin(4\pi)-1}{\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right)-1}=\frac{z^{2n}-1}{z^2-1}=\sum_{k=0}^{n-1}z^{2k}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{4k\pi}{n}\right)\right).$$

Az $n\geq 3$ feltétel miatt $\dfrac{4}{n}$ nem lehet páros egész szám, így a nevezőben szereplő $\cos(4\pi)+i\cdot\sin(4\pi)-1\neq 0$. Viszont a számláló, $\cos(4\pi)+i\cdot\sin(4\pi)-1=0$, tehát

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{4k\pi}{n}\right)\right)=0.$$

Most használjuk fel a trigonometrikus alakban adott komplex számok szorzására vonatkozó azonosságot tagonként:

$$0=\big(\cos(2\alpha)+i\cdot\sin(2\alpha)\big)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{4k\pi}{n}\right)\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left((\cos(2\alpha)+i\cdot\sin(2\alpha))\left(\cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{4k\pi}{n}\right)\right)\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(2\alpha+\frac{4k\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(2\alpha+\frac{4k\pi}{n}\right)\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(2\alpha+\frac{4k\pi}{n}\right)\right)+i\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sin\left(2\alpha+\frac{4k\pi}{n}\right)\right).$$

Tudjuk, hogy ez a komplex szám nulla, emiatt a valós része is nulla:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(2\alpha+\frac{4k\pi}{n}\right)\right)=0.$$

Az eredeti állításhoz visszatérve tehát beláttuk, hogy

$$2\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2\left(\alpha+\frac{2k\pi}{n}\right)=n,\quad\text{vagyis}\quad\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2\left(\alpha+\frac{2k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2}.$$

Weisz Máté (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján