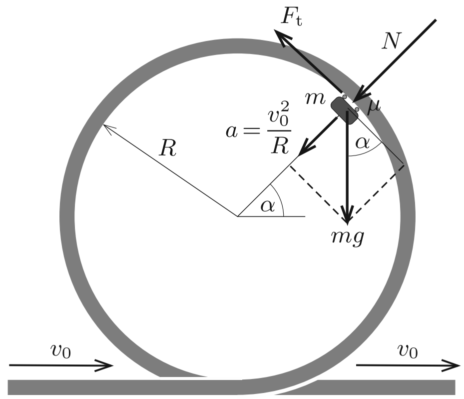
I. megoldás. Tekintsük az *1. ábrán* látható módon az α szöggel jellemzett helyen a kocsira ható erőket, és bontsuk fel ezeket sugárirányú (radiális) és érintőirányú (tangenciális) összetevőkre! (A körpálya középpontja irányába mutató radiális vektorkomponenseket, illetve az óramutató járásával ellentétes irányú tangenciális komponenseket tekintjük pozitívnak.)

Ha a kocsi állandó v_0 sebességgel mozog, a mozgásegyenletei:

(1)
$$mg\cos\alpha - F_\mathrm{t} = 0,$$

(2)
$$\frac{mv_0^2}{R} = N + mg\sin\alpha.$$



1. ábra

(Itt F_t a kocsira ható tapadó súrlódási erő, N pedig a sínek által kifejtett radiális nyomóerő.) Mivel a csúszásmentesség feltétele $|F_\mathrm{t}| \le \mu N$, (1) és (2) alapján fennáll:

$$\mu mg|\cos\alpha| \le \mu\frac{mv_0^2}{R} - \mu mg\sin\alpha,$$

vagyis

(4)
$$\mu\frac{v_0^2}{Rg} \ge \mu\sin\alpha + |\cos\alpha|.$$

A továbbiakban ($\cos\alpha$ előjelétől függően) két esetet kell vizsgálnunk.

1. Ha $\cos\alpha > 0$, vagyis a kocsi a motorját használva a pálya jobb oldali részén felfelé halad, akkor

(5)
$$\mu\frac{v_0^2}{Rg} \ge \mu\sin\alpha + \cos\alpha.$$

A súrlódási együtthatót érdemes $\mu = \operatorname{tg}\varepsilon$ alakban felírni (ε az ún. súrlódási határszög), mert ennek segítségével (5) így írható:

$$\frac{v_0^2}{Rg}\,\frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon} \ge \frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}\sin\alpha + \cos\alpha,$$

azaz

(6)
$$\frac{v_0^2}{Rg}\cdot\sin\varepsilon \ge \sin\alpha\sin\varepsilon + \cos\alpha\cos\varepsilon \equiv \cos(\alpha-\varepsilon).$$

Ennek az egyenlőtlenségnek minden $-90^\circ \le \alpha \le 90^\circ$ szögre, így $\alpha = \varepsilon$ esetén is fenn kell állnia. Ekkor a csúszásmentes mozgás sebességére a

(7)
$$v_0 \ge \sqrt{\frac{Rg}{\sin\varepsilon}} = \sqrt{Rg\sqrt{\frac{\cos^2\varepsilon + \sin^2\varepsilon}{\sin^2\varepsilon}}} = \sqrt{Rg\sqrt{\frac{1}{\mu^2}+1}}$$

alsó korlátot kapjuk. Ha ez a feltétel *éppen* nem teljesül, akkor a hullámvasút kocsija az $\alpha_{1.\mathrm{krit.}} = \varepsilon = \operatorname{arctg}\mu$ kritikus helyzet közelében megcsúszik.

2. Ha $\cos\alpha < 0$, vagyis a kocsi a fékeit használva a pálya bal oldali részén lefelé halad, akkor

(8)
$$\mu\frac{v_0^2}{Rg} \ge \mu\sin\alpha - \cos\alpha,$$

vagyis

(6) $$\frac{v_0^2}{Rg}\sin\varepsilon \geq \sin\alpha\sin\varepsilon - \cos\alpha\cos\varepsilon \equiv -\cos(\alpha+\varepsilon).$$

Ennek az egyenlőtlenségnek minden $90^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$ szögre, így $\alpha = 180^\circ - \varepsilon$ esetén is fenn kell állnia. Ekkor a sebességre ismét a (7)-nek megfelelő alsó korlátot kapjuk. Ha ez a feltétel *éppen* nem teljesül, akkor a hullámvasút kocsija az

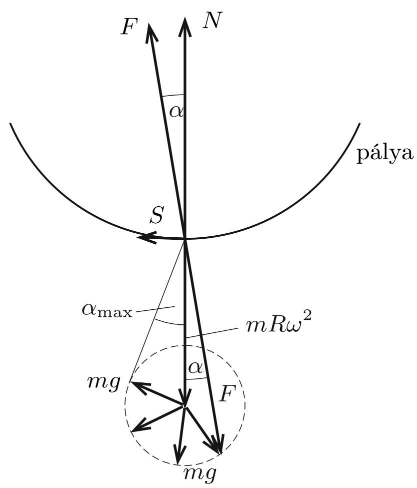
$$\alpha_{2.\text{krit.}} = 180^\circ - \varepsilon = 180^\circ - \operatorname{arctg}\mu$$

kritikus helyzet közelében megcsúszik.

Bokor Endre (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Írjuk le a mozgást a hullámvasút kocsijában ülő ember vonatkoztatási rendszerében. Ebben a rendszerben az összesen m tömegű, ω szögsebességgel mozgó kocsira állandó $mR\omega^2$ nagyságú és mindig „lefelé" (a kör középpontjával ellentétes irányba) mutató „centrifugális erő", valamint egy mg nagyságú, de változó irányú (egyenletesen körbeforduló) nehézségi erő hat (*2. ábra*).

Ezen két erő $\boldsymbol{F}$ eredőjével tart egyensúlyt a sínek által kifejtett $\boldsymbol{N}+\boldsymbol{S}$ erő, amelynek a „felfelé" iránnyal bezárt α szöge legfeljebb $\operatorname{arctg}\mu$ lehet, hiszen $|\boldsymbol{S}| \leq \mu|\boldsymbol{N}|$.



2. ábra

A 2. ábrán látható, hogy α legnagyobb értékét akkor veszi fel, amikor a centrifugális erő és a nehézségi erő vektora derékszögű háromszöget határoz meg, és

$$\operatorname{tg}\alpha_{\max} = \frac{mg}{\sqrt{(mR\omega^2)^2 - (mg)^2}} \leq \mu.$$

Innen kapjuk, hogy a kocsi sebessége:

$$v_0 = R\omega \geq \sqrt{Rg\sqrt{\frac{1}{\mu^2}+1}}\,.$$

Ha a sebesség a kritikus értéknél egy kicsit kisebb, a kocsi a pálya azon pontjánál csúszik meg, ahol kör középpontjából nézve a vízszintessel bezárt szög éppen $\operatorname{arctg}\mu$.

Hisham Mohammed Almalki (Rijád, Manarat Al-Riyadh School, 11. évf.)