I. megoldás. Jelölje a harmadfokú polinomot $p(x)$, aminek a pozitív gyökei a, b és c. Ekkor $p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$, így $A=-(a+b+c)$, $B=(ab+bc+ca)$, $C=-abc$, ezért a bizonyítandó egyenlőtlenség $A^2+B^2+18C=(a+b+c)^2+(ab+bc+ca)^2-18abc>0$. Adjunk hozzá mindkét oldalhoz $18abc$-t, és hajtsuk végre a bal oldalon kijelölt műveleteket. Így a bizonyítandóval ekvivalens

$$a^2+b^2+c^2+ab+ab+bc+bc+ca+ca+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2bc+a^2bc+ \\ +ab^2c+ab^2c+abc^2+abc^2>18abc$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ami a 18 változós számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt igaz (hiszen a gyökök pozitívak), és a bal oldal szigorúan nagyobb, hiszen a gyökök nem esnek egybe a feltétel alapján.

Csiszár Zoltán (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 11. évf.)

II. megoldás. A bizonyítandó

$$S=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2bc+ \\ +2ab^2c+2abc^2-18abc>0$$

egyenlőtlenség bal oldala a következőképpen alakítható:

$$\begin{aligned} S&=(a^2-2abc+b^2c^2)+(b^2-2abc+a^2c^2)+(c^2-2abc+a^2b^2)+ \\ &\quad+2ab(c^2-2c+1)+2ac(b^2-2b+1)+2bc(a^2-2a+1)= \\ &=(a-bc)^2+(b-ac)^2+(c-ab)^2+2ab(c-1)^2+2ac(b-1)^2+2bc(a-1)^2, \end{aligned}$$

ami nyilván pozitív.

Hámori Janka (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 10. évf.)