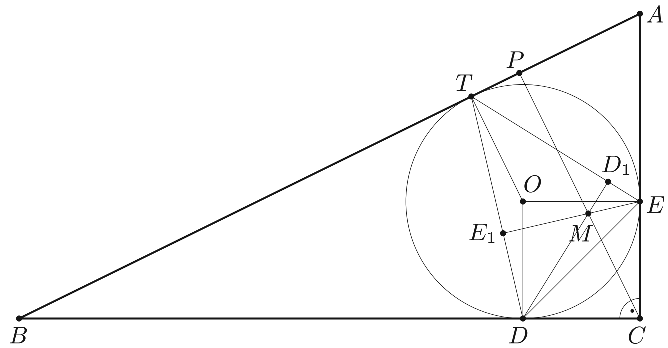
I. megoldás. Legyen a háromszög három csúcsa A, B és C, melyek közül C a derékszögű csúcs, és jelölje a B-nél lévő szöget β, az A-nál lévő szög ekkor $\alpha = 90^\circ - \beta$. Legyenek beírt kör érintési pontjai az AB, AC, BC oldalakon T, E, D, a TDE háromszög magasságpontja M, és a beírt kör középpontja O. Ekkor $OECD$ egy négyzet. Legyen E_1 és D_1 az ETD háromszög E-ből, illetve D-ből induló magasságának talppontja.



1. ábra

Végül legyen P az ABC háromszög C-hez tartozó magasságtalppontja, M_D a PC és DM egyenes metszéspontja, M_E pedig a PC és EM egyenes metszéspontja.

Végezzünk szögszámítást.

$$EDM\sphericalangle = EDD_1\sphericalangle = 90^\circ - D_1ED\sphericalangle = 90^\circ - TED\sphericalangle.$$

A középponti és kerületi szögek tételéből

$$EDM\sphericalangle = 90^\circ - \frac{TOD\sphericalangle}{2}.$$

Mivel $ODB\sphericalangle = OTB\sphericalangle = 90^\circ$, ezért $OTBD$ húrnégyszög, így

$$EDM_D\sphericalangle = EDM\sphericalangle = 90^\circ - \frac{180^\circ - \beta}{2} = \frac{\beta}{2}.$$

Hasonló módon

$$DEM\sphericalangle = DEE_1\sphericalangle = 90^\circ - EDE_1\sphericalangle = 90^\circ - EDT\sphericalangle = 90^\circ - \frac{EOT\sphericalangle}{2},$$

$OEA\sphericalangle = OTA\sphericalangle = 90^\circ$, $OTAE$ húrnégyszög, és

$$DEM_E\sphericalangle = DEM\sphericalangle = 90^\circ - \frac{180^\circ - (90^\circ - \beta)}{2} = 45^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

Ismert továbbá, hogy $ACP\sphericalangle = \beta$, $PCB\sphericalangle = 90^\circ - \beta$, és $CAP\sphericalangle = 90^\circ - \beta$. Ezekből következik, hogy $ECM_E\sphericalangle = \beta$ és $DCM_D\sphericalangle = 90^\circ - \beta$.

Mivel $OECD$ négyzet, így $CED\sphericalangle = CDE\sphericalangle = 45^\circ$, vagyis

$$CEM_E\sphericalangle = CED\sphericalangle + DEM_E\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\beta}{2}, \quad \text{és}$$
$$CDM_D\sphericalangle = CDE\sphericalangle + EDM_D\sphericalangle = 45^\circ + \frac{\beta}{2}.$$

Mivel $ECM_E\sphericalangle = ACP\sphericalangle = \beta$ és $CEM_E\sphericalangle = 90^\circ - \beta/2$, ezért

$$EM_EC\sphericalangle = 180^\circ - \beta - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = 90^\circ - \frac{\beta}{2},$$

vagyis az ECM_E háromszög egyenlő szárú, $EC = CM_E$.

Mivel $DCM_D\sphericalangle = PCB\sphericalangle = 90^\circ - \beta$ és $CDM_D\sphericalangle = 45^\circ + \beta/2$, ezért

$$DM_DC\sphericalangle = 180^\circ - (90^\circ - \beta) - \left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) = 45^\circ + \frac{\beta}{2},$$

vagyis DCM_D háromszög egyenlő szárú, $DC = CM_D$.

Mivel $OECD$ négyzet, így $EC = DC$, vagyis $CM_E = CM_D$, tehát $M_E \equiv M_D \equiv M$, tehát M rajta van a derékszögű csúcshoz tartozó magasságvonalon.

Az egyetlen kritikus pont a bizonyításban annak feltételezése, hogy a TED háromszög hegyesszögű (ebből következik, hogy M a háromszög belsejében van és az ábrán megfelelően állnak a szögek). A fentiek alapján

$$TED\sphericalangle = \frac{TOD\sphericalangle}{2} = \frac{180^\circ - \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

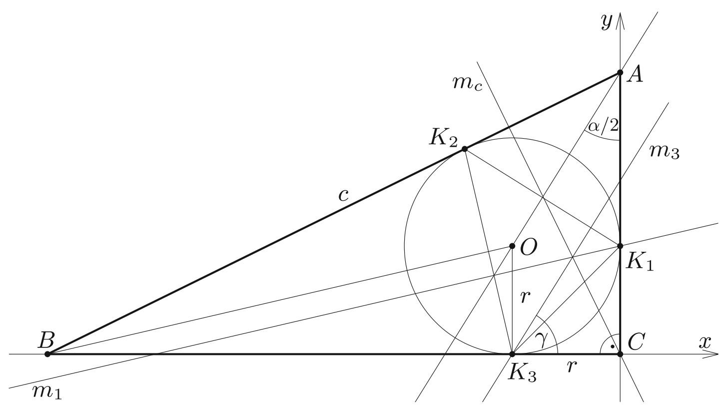
Mivel β 0° és 90° közt van, így ez hegyesszög.

$$EDT\sphericalangle = \frac{EOT\sphericalangle}{2} = \frac{180^\circ - (90^\circ - \beta)}{2} = 45^\circ + \frac{\beta}{2}.$$

Mivel β 0° és 90° közt van, így ez hegyesszög. $ETD\sphericalangle = 180^\circ - TED\sphericalangle - EDT\sphericalangle = 45^\circ$. Ezek alapján a TED háromszög valóban hegyesszögű.

Zsigri Bálint (Budapest XIV. Ker. Szent István Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. Helyezzük el a háromszöget a derékszögű koordinátarendszerben a *2. ábrán* látható módon. A derékszögű háromszög beírt körének érintési pontjait jelölje K_1, K_2 és K_3. A K_1-hez és K_3-hoz tartozó magasságvonalak legyenek m_1 és m_3, a c oldalhoz tartozó pedig m_c. Felírva ezen magasságvonalak egyenleteit könnyen ellenőrizhetjük, hogy valóban egy pontban metszik-e egymást. Legyen $BAC\sphericalangle = \alpha$, $ABC\sphericalangle = \beta$ és jelölje γ az ábrán berajzolt szöget.



2. ábra

Mivel m_3 és az AO szögfelező is merőleges K_1K_2-re, ezért párhuzamosak egymással. Az OK_3CK_1 négyszög egy r oldalú négyzet, ezért m_3 a $-r$ koordinátánál metszi az x tengelyt, így egyenlete $y = \operatorname{tg}\gamma \cdot x + \operatorname{tg}\gamma \cdot r$. Hasonlóan belátható, hogy m_1 párhuzamos BO-val és az y tengelyt r-nél metszi. Az egyenlete $y = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot x + r$. Az m_c magasság egyenes merőleges a c oldalra és az origón megy keresztül, ezért az egyenletét könnyen megkaphatjuk: $y = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot x$.

Az AO szögfelező és m_3 párhuzamosságából következik, hogy γ az $\frac{\alpha}{2}$ pótszöge. Felhasználva, hogy $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}$, ebből $\gamma = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$ adódik. A félszögek tangensére vonatkozó azonosságot felhasználva $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}$, valamint

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \beta}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)} = \frac{\cos\beta}{1 - \sin\beta}.$$

Összegezve:

$$m_3 \text{ egyenlete: } y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \cdot x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \cdot r = (x + r)\frac{\cos\beta}{1 - \sin\beta},$$

$$m_1 \text{ egyenlete: } y = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot x + r = \frac{\sin\beta}{1 + \cos\beta} \cdot x + r,$$

$$m_c \text{ egyenlete: } y = -\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}x = -\frac{\cos\beta}{\sin\beta}x.$$

Az m_1 és az m_3 egyenes biztosan metszik egymást, méghozzá abban az x koordinátájú pontban, amelyre

$$(x + r)\frac{\cos\beta}{1 - \sin\beta} = \frac{\sin\beta}{1 + \cos\beta}x + r.$$

Ebből

$$x\left(\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}-\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}\right)=r\left(1-\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}\right),$$

$$\begin{aligned} x&=r\cdot\frac{1-\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}}{\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}-\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}}=r\cdot\frac{\frac{1-\sin\beta-\cos\beta}{1-\sin\beta}}{\frac{\cos\beta(1+\cos\beta)-\sin\beta(1-\sin\beta)}{(1-\sin\beta)(1+\cos\beta)}}=\\ &=r\cdot\frac{(1-\sin\beta-\cos\beta)(1+\cos\beta)}{\cos\beta+\cos^2\beta-\sin\beta+\sin^2\beta}=\\ &=r\cdot\frac{1-\sin\beta-\cos\beta+\cos\beta-\sin\beta\cos\beta-\cos^2\beta}{\cos\beta-\sin\beta+1}=\\ &=\frac{\sin\beta(\cos\beta-\sin\beta+1)}{\cos\beta-\sin\beta+1}=-r\cdot\sin\beta. \end{aligned}$$

Behelyettesítve ezt az x értéket m_c és m_3 egyenletébe:

$$m_c\colon\ -\frac{\cos\beta}{\sin\beta}(-\sin\beta\cdot r)=\cos\beta\cdot r,$$

$$m_3\colon\ (-\sin\beta\cdot r+r)\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}=\cos\beta\cdot r.$$

Tehát valóban egy pontban metszik egymást.

Bokor Endre (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

III. megoldás. Jelölje K_1, K_2 és K_3 az ABC háromszögbe írt kör érintési pontjait az oldalakon a 2. ábra szerint, és legyen a $K_1K_2K_3$ háromszög magasságpontja M.

Külső pontból körhöz húzott érintők hossza egyenlő, tehát $CK_1=CK_3$. Továbbá az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre: $OK_1C\sphericalangle=OK_3C\sphericalangle=90^\circ$. Mindezekből következik, hogy az OK_3CK_1 négyszög négyzet.

Legyen O az origo, valamint mutasson minden pontba azonos nevű helyvektor ($\overrightarrow{OA}=\mathbf{a},\dots$).

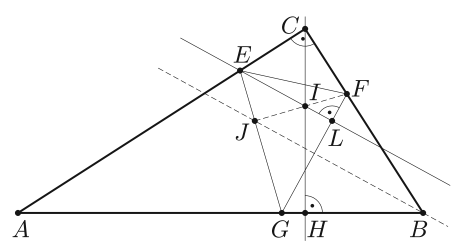
Ismert, hogy a háromszög köréírt körének O középpontjából a csúcsokba mutató vektorok összege az O-ból a magasságpontba mutató vektor. Mivel most O a $K_1K_2K_3\triangle$ köré írt körének középpontja, ezért O-ból e háromszög M magasságpontjába az $\mathbf{m}=\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}+\mathbf{k_3}$ vektor mutat.

OK_3CK_1 négyzet, ezért egyben paralelogramma is: $\mathbf{c}=\mathbf{k_1}+\mathbf{k_3}$. Ebből $\overrightarrow{CM}=\mathbf{m}-\mathbf{c}=(\mathbf{k_1}+\mathbf{k_3}+\mathbf{k_2})-(\mathbf{k_1}+\mathbf{k_3})=\mathbf{k_2}=\overrightarrow{OK_2}$.

Tudjuk, hogy $OK_2\perp AB$, ezért a fentiekből következik, hogy $CM\perp AB$, és így M rajta van a C-ből induló magasságvonalon.

Csertán András (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 12. évf.)

IV. megoldás. Az ABC háromszögbe írt kör érintési pontjai által meghatározott háromszög legyen EFG, és jelölje I az EL és CH egyenesek metszéspontját (*3. ábra*).



3. ábra

Mivel GF merőleges a $CBH\sphericalangle$ szögfelezőjére és merőleges EL-re, ezért EL párhuzamos a szögfelezővel. Legyen $\alpha=CAB\sphericalangle$ és $\beta=CBA\sphericalangle$, ekkor

$$BCH\sphericalangle=\alpha\quad\text{és}\quad ACH\sphericalangle=\beta,\quad HBC_\triangle\sim HCA_\triangle.$$

Tehát a HBC háromszöget el tudjuk forgatni H körül 90 fokkal, majd H pont körüli nagyítást alkalmazhatunk úgy, hogy a B pont a C pontba, a C pont pedig az A pontba kerüljön. Ekkor a HAC háromszöget fogjuk kapni, tehát EL merőleges az $ACH\sphericalangle$ szögfelezőjére (mert 90 fokkal forgattunk és AHC és CHB hasonlók). Ebből következik, hogy $CE=CI$. Hasonlóan belátható, hogy FJ merőleges a $BCH\sphericalangle$ szögfelezőjére. Mivel $CE=CF$ (körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők), ezért $CF=CI$ is teljesül. Emiatt a $BCH\sphericalangle$ szögfelezője merőleges FI-re, vagyis F, I és J egy egyenesre esnek. Tehát FJ és CH metszéspontja is az I pont, azaz EFG magasságpontja az ABC háromszög C-hez tartozó magasságán fekszik.

Bukva Dávid (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)