**I. megoldás.** A legnagyobb sugarú hozzáírt kör a leghosszabb oldalhoz tartozik. Feltehetjük, hogy $a \geq b \geq c$. A háromszögre vonatkozó ismert összefüggések ($s$ a háromszög félkerülete):

$$r_a = \frac{T}{s-a} = \frac{2T}{b+c-a}, \qquad R = \frac{abc}{4T}.$$

A bizonyítandó egyenlőtlenség ezek alapján:

$$\frac{2T}{b+c-a} \geq \frac{3abc}{8T}.$$

Átszorzás után a $16T^2$ helyére a Heron-képlet alapján beírhatjuk, hogy

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

A háromszög-egyenlőtlenség szerint $b+c>a$, azaz $b+c-a$ pozitív, így egyszerűsíthetünk vele. Így a bizonyítandó állítás:

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c) \geq 3abc.$$

(Itt is látható, hogy ez az állítás szimmetrikus a $b$ és $c$ változókra, tehát $b \geq c$ valóban feltehető.)

Most helyettesítsük az oldalakat a bizonyítandó egyenlőtlenségben a beírt kör által levágott érintőszakaszokkal, vagyis legyen $s-a=x, s-b=y$ és $s-c=z$. A háromszög-egyenlőtlenség miatt ezek mind pozitívak. Feltettük, hogy $a \geq b \geq c$, ennek megfelelően $z \geq y \geq x$ is igaz. A helyettesítés után:

$$2(x+y+z) \cdot 2y \cdot 2z \geq 3(x+y)(y+z)(z+x).$$

A zárójelek fölbontása és a kifejezések összevonása után:

$$2xyz + 5y^2z + 5yz^2 \geq 3x^2y + 3xy^2 + 3z^2x + 3zx^2.$$

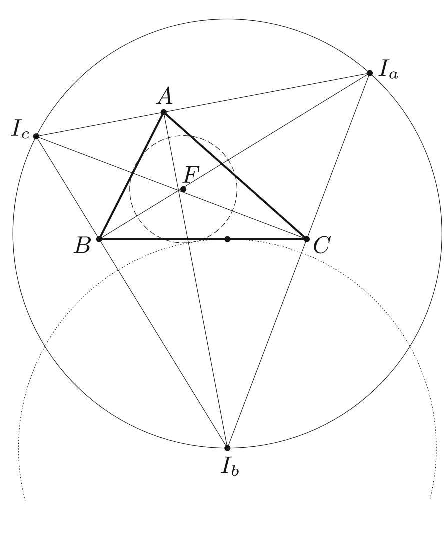
Felírhatunk több egyenlőtlenséget, amelyek a $z \geq y \geq x$ feltételből azonnal következnek:

$$\begin{aligned} 2xyz &\geq 2xy^2, \\ 3yz^2 &\geq 3xz^2, \\ 3y^2z &\geq 3x^2z, \\ y^2z &\geq xy^2, \\ y^2z &\geq x^2y, \\ 2yz^2 &\geq 2x^2y. \end{aligned}$$

Ezeket összeadva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk, és mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az eredeti is igaz. Egyenlőség csakis úgy teljesülhet, ha $x=y=z$, vagyis a háromszög szabályos.

*Tubak Dániel* (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

**II. megoldás.** Jelölje szokásosan $a$, $b$, $c$ az oldalakat, $s$ a félkerületet, $R$ a köréírt kör sugarát, továbbá $r_a$, $r_b$, $r_c$ a kozzáírt körök sugarait, $F$ a Feuerbach-kör középpontját, $O$ a köréírt kör középpontját, $I_a$, $I_b$, $I_c$ pedig a hozzáírt körök középpontjait.



$FI_a = \dfrac{R}{2} + r_a$, hiszen a Feuerbach-kör sugara $\dfrac{R}{2}$, továbbá a Feuerbach-kör érinti a hozzáírt köröket. Ezért hasonlóan $FI_b = \dfrac{R}{2} + r_b, FI_c = \dfrac{R}{2} + r_c$.

Rövid számolással belátható, hogy a hozzáírt körök középpontjaiból álló háromszög szögei $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $\dfrac{\beta+\gamma}{2}$, $\dfrac{\gamma+\alpha}{2}$ (ahol $\alpha, \beta, \gamma$ a háromszög szögei), így ez a háromszög hegyesszögű. A hozzááírt körök középpontjaiból rajzolt háromszög magasságainak talppontjai $A$, $B$, $C$, így e háromszög Feuerbach-köre éppen az $ABC$ háromszög köréírt köre, melynek sugara $R$ – vagyis az $I_aI_bI_c$ háromszög köréírt körének sugara $2R$.

Legyen ennek a körnek a középpontja $G$. A $G$ az $I_aI_bI_c$ háromszögön belül van, hiszen ez a háromszög hegyesszögű. A síkon ez az egyetlen pont, amely az $I_a$, $I_b$, $I_c$ pontok mindegyikétől legfeljebb $2R$ távolságra van, ugyanis ha vennénk az $I_a$, $I_b$ és $I_c$ középpontú $2R$ sugarú köröket, akkor azoknak még további közös pontja is lenne, de mivel a körvonalaik $G$-ben közösen metszik egymást és a köréírt kör középpontja egyértelmű (nincs a körvonalaknak még egy közös metszéspontja), ezért $G$ az egyetlen ilyen pont.

Így van olyan körközéppont, mondjuk $I_a$ úgy, hogy $FI_a > 2R$, azaz

$$\frac{R}{2} + r_a \geq 2R \quad \Leftrightarrow \quad r_a \geq \frac{3}{2}R.$$

Egyenlőség pontosan akkor van, ha $F$ és $G$ egybeesik. Az $I_a$, $I_b$ és $I_c$ középpontú hozzáírt körök sugarai általában különbözőek. A $G$ pont az $I_aI_bI_c$ háromszög körülírt körének középpontja, az eredeti $F$ középpontú Feuerbach-kör pedig mindhárom hozzáírt kört kívülről érinti. Az $F$ és $G$ pontok tehát akkor eshetnek egybe, ha az $F$ pont is egyenlő távolságra van mindegyik hozzáírt kör középpontjától, tehát a három kör sugara egyenlő, vagyis az eredeti háromszög szabályos.

*Kerekes Anna* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján