

Egy szám osztóinak számát úgy határozzuk meg, hogy prímtényezősz felbontásában a prímszámok kitevőinél eggyel nagyobb számokat összeszorozzuk. A mi esetünkben ennek a szorzatnak prímszámnak kell lennie. Ha a prímtényezősz felbontásban egynél több prímtényező szerepelne, akkor az osztók száma nem lenne prímszám; tehát mindkét szám prímszám.

Ebből következik, hogy ha az  $N$  számnak  $q$  darab osztója van, akkor a hatványkitevője  $(q-1)$ . Mivel  $N$  prímtényezősz felbontásában egy prímszám szerepel és  $N$  osztható  $p$ -vel, így ez a prímszám a  $p$ . Tehát  $N = p^{q-1}$ . Hasonlóan kapjuk, hogy  $M = q^{p-1}$ .

Meg kell vizsgálnunk, hogy az  $N + M = p^{q-1} + q^{p-1}$  összeg mikor lesz ötjegyű. Az egyenlet jobb oldalán  $p$  és  $q$  felcserélésével ugyanazt az eredményt kapjuk, így az egyszerűség kedvéért egyelőre tételezzük fel, hogy  $p \leq q$ . Ha  $p^{q-1}$  legalább hatjegyű, akkor a  $p^{q-1} + q^{p-1}$  összeg is az. Mivel  $2^{18}$ ,  $3^{12}$ ,  $5^{10}$ , illetve  $7^6$  legalább hatjegyű, ezért csak az alábbi 13 esetet kellett megvizsgálnunk (a táblázat belsejében a megfelelő  $p^{q-1} + q^{p-1}$  értékek állnak).

$p \backslash q$	2	3	5	7	11	13	17
2	4	7	21	71	1035	4109	<b>65 553</b>
3		18	106	778	<b>59 170</b>		
5			1250	<b>18 026</b>			

Ezekben az esetekben  $N$  és  $M$  lehetséges értékei (figyelembe véve, hogy felcserélhetőek).

$p$	$q$	$N$	$M$
2	17	65 536	17
17	2	17	65 536
3	11	59 049	121
11	3	121	59 049
5	7	15 625	2401
7	5	2401	15 625

Varga Ákos (Kecskemét, Bányai Júlia Gimn., 11. évf.)

*Megjegyzés.* A javítás során sajnos viszonylag kevés maximális értékű megoldás született. Sokan figyelmetlenségéből nem a feladat kérdésére válaszoltak, hanem csak a prímekeket adták meg, az  $N$  és  $M$  számokat nem. Szintén sokan voltak, akik hat helyett csak három megoldást adtak meg, és nem vették észre, hogy  $N$  és  $M$  felcserélhető. Sokan voltak azok is, akik nem indokoltak kellően részletesen, és emiatt veszítettek pontot (általában vagy  $N$  és  $M$   $p$ -vel és  $q$ -val felírását nem vezették le, vagy a prímeke kiválasztásánál csak felírták a jókat, megmutatták, hogy azok tényleg jók, de nem indokolták, hogy más megoldások nem lehetnek). Aki egyáltalán nem indokolt, csak végeredményt közölt, az 0 pontot kapott, mivel a versenykiírás szerint pusztán az eredményközlésre nem adható pont. Emellett persze voltak szép megoldások is.