Könnyen látható, hogy $a_i = \dfrac{1}{n^i}$ és $n \to \infty$ esetén, ha $i \neq 1$, akkor $\dfrac{a_i}{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}$ határértéke 0 lesz, $\dfrac{a_1}{a_n+a_1+a_2}$ határértéke pedig 1, ezért a teljes összeg 1-hez konvergál. Az is látszik, hogy ha minden $a_{2k+1}=0$, és minden $a_{2k}=1$ lenne, akkor az összeg éppen $\dfrac{n}{2}$ egész része lenne; azonban az a_i számok előírt pozitivitása miatt $a_{2k+1}=0$ helyett az $a_{2k+1} \to 0$ esetet vizsgáljuk: ilyenkor az összeg tetszőlegesen közelíti az $\dfrac{n}{2}$ egész részét. Ezzel a feladat második részének két követelményét igazoltuk.

Rátérünk a két egyenlőtlenség bizonyítására.

Az 1 *szigorú alsó korlát:* $n=3$ esetén a három tag összege $\dfrac{a_1+a_2+a_3}{a_1+a_2+a_3}=1$. Belátjuk, hogy ha minden $a_1,\dots,a_n$ pozitív szám n-esre az összeg 1-nél nagyobb, akkor ez minden pozitív $a_1,\dots,a_{n+1}$ szám $n+1$-esre is teljesül. Legyen a_i az $a_1,\dots,a_{n+1}$ számok közül a(z egyik) legkisebb; ekkor speciálisan $a_i \le a_{i-1}$ és $a_i \le a_{i+1}$. Tekintsük azt a szám n-est, amelyet az $a_1,\dots,a_{n+1}$ számokból az a_i elhagyásával kapunk. Az ehhez a szám n-eshez tartozó összeget az $a_1,\dots,a_{n+1}$-hez tartozó összegből kivonva a különbség:

$$\begin{aligned}
&\frac{a_{i-1}}{a_{i-2}+a_{i-1}+a_i}+\frac{a_i}{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}+\frac{a_{i+1}}{a_i+a_{i+1}+a_{i+2}}-\\
&-\frac{a_{i-1}}{a_{i-2}+a_{i-1}+a_{i+1}}-\frac{a_{i+1}}{a_{i-1}+a_{i+1}+a_{i+2}}=\\
&=\left(\frac{a_{i-1}}{a_{i-2}+a_{i-1}+a_i}-\frac{a_{i-1}}{a_{i-2}+a_{i-1}+a_{i+1}}\right)+\\
&+\left(\frac{a_{i+1}}{a_i+a_{i+1}+a_{i+2}}-\frac{a_{i+1}}{a_{i-1}+a_{i+1}+a_{i+2}}\right)+\frac{a_i}{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}.
\end{aligned}$$

Itt az első különbség $a_i \le a_{i+1}$, a második pedig $a_i \le a_{i-1}$ miatt nemnegatív, az utolsó tag pedig az a_k számok pozitív voltából adódóan pozitív, tehát az $n+1$ számhoz tartozó összeg nagyobb, mint az a_i elhagyásával kapott n számhoz tartozó összeg; ezzel az első egyenlőtlenséget az n szerinti indukcióval beláttuk.

Az $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ *szigorú felső korlát:* Bármely két szomszédos tag összege legfeljebb 1, hiszen

$$\frac{a_i}{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}+\frac{a_{i+1}}{a_i+a_{i+1}+a_{i+2}}<\frac{a_i+a_{i+1}}{a_i+a_{i+1}}=1.$$

Tehát páros n-re kettesével összepárosítva a tagokat, éppen a kívánt állítást kapjuk.

Páratlan n-re indukcióval bizonyítunk; $n=3$ esetén a három tag összege, mint korábban láttuk, $1=\left[\dfrac{3}{2}\right]$.

Tegyük föl ezután, hogy az egyenlőtlenség bármely $n-2=2k+1$ szám esetén fennáll, és tekintsünk $n=2k+3$ pozitív számot. Ha létezik köztük a_i, a_{i-1} úgy, hogy $a_{i-1} \ge a_{i+1}$ és $a_i \ge a_{i-2}$, akkor őket elhagyva, a kapott $n-2$ tagú sorozathoz tartozó összeget jelölje $S(n-2)$, az n számból álló sorozathoz tartozó összeget pedig $S(n)$. Ekkor

$$\begin{aligned}
S(n)=S(n-2)&-\left(\frac{a_{i-2}}{a_{i-3}+a_{i-2}+a_{i+1}}-\frac{a_{i-2}}{a_{i-3}+a_{i-2}+a_{i-1}}\right)-\\
&-\left(\frac{a_{i+1}}{a_{i-2}+a_{i+1}+a_{i+2}}-\frac{a_{i+1}}{a_i+a_{i+1}+a_{i+2}}\right)+\\
&+\frac{a_{i-1}}{a_{i-2}+a_{i-1}+a_i}+\frac{a_i}{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}\le\\
&\le S(n-2)+\frac{a_{i-1}}{a_{i-2}+a_{i-1}+a_i}+\frac{a_i}{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}\le\\
&\le S(n-2)+\frac{a_{i-1}}{a_{i-1}+a_i}+\frac{a_i}{a_{i-1}+a_i}=S(n-2)+1,
\end{aligned}$$

ami az indukciós feltevés szerint kisebb, mint $\left[\dfrac{n-2}{2}\right]+1 \le \left[\dfrac{n}{2}\right]$. Így az állítás minden pozitív szám n-esre is igaz.

Végül, a megfelelő, $a_{i-1} \ge a_{i+1}$ és $a_i \ge a_{i-2}$ feltételeket kielégítő a_i, a_{i-1} pár megtalálásához válasszuk a_i-nek a számok legnagyobbikát; ekkor speciálisan $a_i \ge a_{i-2}$. Ha ezen kívül $a_{i-1} \ge a_{i+1}$ is teljesül, akkor az a_i, a_{i-1} pár megfelelő. Ellenkező esetben $a_{i+1} > a_{i-1}$, akkor viszont az a_{i+1}, a_i pár felel meg.

Szabó Kornél (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)