I. megoldás. Azt állítjuk, hogy k matematikus 2^{k-1}-féleképpen tud beköltözni a szobákba. Ezt teljes indukcióval bizonyítjuk.

$k=1$: Egy ember egy szobába csak $1=2^0=2^{1-1}$-féleképpen költözhet be.

$k=2$: Az első ember beköltözik valamelyik szobába a kettő közül, a másodiknak már nincs választása, tehát $2=2^1=2^{2-1}$-féleképpen tudnak beköltözni.

Most tegyük fel, hogy valamely k-ig ($k\geq 2$) minden pozitív egészre igaz az állításunk. Megmutatjuk, hogy ekkor $(k+1)$-re is igaz, vagyis $k+1$ matematikus 2^k-féleképpen tud beköltözni a szobákba.

Ha az első ember a saját szobájába (az első számúba) megy, akkor utána mindenki a neki kijelölt szobába fog menni, tehát ez egyféle beköltözés.

Ha az első ember az n-edik szobába megy ($2\leq n\leq k+1$), akkor egészen az $(n-1)$-edik emberig mindenki más el tudja foglalni a saját szobáját. Foglalkozzunk a többi matematikussal, akiknek száma $(k+1)-(n-1)=k-n+2$. Az n-edikként érkezőnek az első foglalta el a szobáját, a többieké viszont még szabad. Vegyük észre, hogy éppen olyan helyzetben van ez a $k-n+2$ matematikus, mintha csak ők lennének a szállodában, és előttük senki sem érkezett volna. Mindenkinek megvan az előre kijelölt szobája: értelmezhető úgy, mintha az n-edik emberé lenne az 1. szoba, ő érkezne elsőnek, és neki felejtette volna el a recepciós megadni az utasítást. Vagyis ha az első ember az n-edik szobába megy ($2\leq n\leq k+1$), akkor a többiek $2^{(k-n+2)-1}$-féleképpen foglalhatják el a szobákat (az indukciós feltevés miatt).

Mivel n értéke 2 és $k+1$ között bármi lehet, így ezeket összegezve kapjuk meg, hogy $k+1$ matematikus hányféleképpen választhat szobát:

$$1+\sum_{n=2}^{k+1}2^{(k-n+2)-1}=1+\sum_{n=2}^{k+1}2^{k-n+1}=$$
$$=1+(2^{k-1}+2^{k-2}+\ldots+2^1+2^0)=1+(2^k-1)=2^k.$$

Tehát 2^{99}-féleképpen költözhetnek be a szobákba a vendégek.

Weisz Máté (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. Megvizsgálom a lehetőségek számát úgy csoportosítva, hogy hány ember nem került arra a helyre, ahova szánták:

– Ha minden ember oda került, akkor az első ember az első szobába ment, ez 1 lehetőség.

– Pontosan 1 ember nem kerülhetett rossz helyre.

– 2 ember került rossz helyre, ha az első vendég az n. szobát foglalta el ($2\leq n\leq 100$), majd az n. vendég az első szobát választotta. Ez $99=\binom{99}{1}$ lehetőség.

– 3 ember nem került jó helyre, ha az első ember elfoglalta az n. szobát ($2\leq n\leq 99$), az n. ember elfoglal egy m. szobát ($n<m\leq 100$), az m. ember pedig az elsőt. Ez annyi lehetőség, ahányféleképpen 2-től 100-ig 2 szobát ki tudunk választani, ahol a kisebb szám n-nek, a nagyobb m-nek felel meg, vagyis $\binom{99}{2}$ lehetőség.

– Hasonlóan gondolkodva: ha x ember került rossz helyre ($2\leq x\leq 100$), akkor a szobák közül 2-től 100-ig $x-1$ ember nincs jó helyen, hiszen $x>1$ esetén az első szobában nem az első vendég foglal helyet. A 99 szoba közül $(x-1)$-et $\binom{99}{x-1}$-féleképpen lehet kiválasztani. Minden ilyen lehetőség egyféleképpen valósulhat meg, hiszen ha sorban vesszük a „rossz" szobákat, akkor a bent lakó vendégek érkezésének sorszáma is növekvő sorrendbe kerül, mivel minden vendég csak a saját, vagy nála nagyobb sorszámú szobába mehetett, mert a többit addigra feltöltötték.

Az összes lehetőség száma tehát: $1+\binom{99}{1}+\binom{99}{2}+\binom{99}{3}+\ldots+\binom{99}{99}$.

Mivel $1=\binom{99}{0}$, így a lehetőségek száma $\binom{99}{0}+\binom{99}{1}+\binom{99}{2}+\binom{99}{3}+\ldots+\binom{99}{99}$, ami a Pascal-háromszög 100. sorában lévő számok összege. Az első sorban az összeg 1; és utána minden egyes szám az alatta lévő sorba két számhoz adódik hozzá, tehát a számok összege lefelé mindig megkétszereződik, a 100. sorban 2^{99}.

Tehát 2^{99}-féleképpen költözhettek be.

Vida Tamás (Győr, Kazinczy F. Gimn., 10. évf.)

III. megoldás. Legyen a lehetséges beköltözések száma n darab matematikus esetén C_n. Nyilvánvaló, hogy $C_1=1$. n matematikus esetén, ha az első matematikus az első szobába költözik be, akkor mindenki egyértelműen beköltözik az érkezésének megfelelő szobába. Ha az első matematikus beköltözik a k-adik szobába ($2\leq k\leq n$), akkor az első utáni $k-2$ matematikus egyértelműen be tud költözni az érkezésének megfelelő szobába. A maradék $n-k+1$ matematikusnak adott az 1., $(k+1)$-edik, $(k+2)$-edik, …, n-edik szoba a beköltözésre. Ekkor tekintsük a szobaszámokat 1, 2, 3, …, $(n-k+1)$-nek. Ekkor az első matematikus tetszőleges szobába költözik be, a többi pedig a feladat szövegének megfelelően, tehát ekkor C_{n+k-1}-féleképpen tudnak beköltözni a matematikusok. Így

$$C_n = 1 + C_{n-2+1} + C_{n-3+1} + \ldots + C_{n-n+1} =$$
$$= 1 + C_{n-1} + C_{n-2} + \ldots + C_1 = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} C_i.$$

Ebből

$$C_{n-1} = 1 + \sum_{i=1}^{n-2} C_i,$$

és így

$$C_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} C_i = 1 + \sum_{i=1}^{n-2} C_i + C_{n-1} = 2 \cdot C_{n-1}.$$

Tudjuk, hogy $C_1 = 1$, így $C_n = 2^{n-1}$.

Ebből pedig következik, hogy 100 matematikus esetén a lehetséges beköltözések száma 2^{99}.

Győrffi Ádám György (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 9. évf.)

IV. megoldás. Vegyünk egy tetszőleges 100 jegyű kettes számrendszerbeli számot. Minden számjegy azt jelöli, hogy az adott ember jó szobában van-e: a 0 azt, hogy jó ember van a szobában, az 1 pedig azt, hogy nem.

Ha az első számjegy 0 (balról nézve), akkor minden számjegy 0, mert ha az első ember jó helyre ment, akkor már mindenki más is.

Ha első számjegy 1 (balról nézve), akkor ez azt jelenti, hogy az első ember nem jó szobába ment. Ha az x-edik szobába ment, akkor x és az 1 számjegy között csupa 0 van.

Ugyanígy, ha az n-edik ember az i. szobát választja (ahol $i \neq 1$ és $n > 1$), akkor $i > n$ és az n és i sorszámú számjegyek között minden szám 0 lesz. Ha az n-edik ember az 1-es szobát választja, akkor minden n feletti számjegy 0 lesz.

Olyan nem fordulhat elő, hogy az első számjegy 1 és a többi 0, mert az első ember elfoglalja valakinek a szobáját.

Ilyen módon minden ilyen kettes számrendszerbeli számból egyértelműen kiszámolható, hogy ki melyik szobába ment és fordítva: abból, hogy ki melyik szobába ment, leírható pontosan egy kettes számrendszerbeli szám.

(Pl. 100100100110100…0010: Az 1. ember a 4. szobába ment, a 4. ember a 7. szobába, a 7. ember a 10. szobába, a 10. ember a 11. szobába, a 11. ember a 13. szobába, …, a 99. ember az 1. szobába. Mindenki más a saját szobájába ment.)

Összesen tehát $2^{99} - 1 + 1 = 2^{99}$ eset van.

Fraknói Ádám (Budapest, Jedlik Ányos Gimn., 11. évf.)

V. megoldás. Tekintsük a feladatot általánosan: n egy adott pozitív egész, és n matematikus érkezik a szállodába, 1-től n-ig számozott szobákba a feladatban leírt módon. Teljes indukcióval belátjuk, hogy ekkor a vendégek 2^{n-1}-féle sorrendben költözhettek be a szobákba. Ez $n = 1$ esetén nyilvánvalóan igaz, hiszen 1 ember csak egyféleképp költözhet be az egyetlen szobába.

Tegyük fel, hogy egy adott n pozitív egészre beláttuk, hogy n vendég 2^{n-1}-féleképpen költözhet be a leírt módon. Ezt felhasználva számláljuk össze, hányféleképpen költözhet be $n + 1$ matematikus.

Megfigyelhető, hogy az $n+1$. matematikus vagy az egyes számú, vagy az $(n + 1)$-es számú szobába költözhetett be, hiszen ha az i. számú szoba $2 \leq i \leq n$-re még szabad az i. matematikus érkezésekor, akkor ő ide költözik, és elfoglalja azt, tehát az $(n + 1)$-edik vendég már nem költözhet ide.

Az olyan beköltözési sorrendek száma, melyekben az $n + 1$. matematikus az $(n + 1)$-es szobába kerül, éppen 2^{n-1}, hiszen ekkor az első n vendég beérkezési sorrendjére igaz, hogy az első vendég egy tetszőleges, 1-től n-ig számozott szobába költözött, a többi vendég pedig, ha tud, a saját sorszámával megegyező szobába, egyébként pedig egy tetszőleges, 1-től n-ig számozott szobába kerül, ami éppen az indukciós feltevésünk által megszámolt (azaz az n vendégre vonatkozó) sorrendek száma.

Most tekintsünk olyan sorrendeket, melyekben az $n + 1$. matematikus az 1-es szobába kerül. Vegyünk egy ilyen sorrendet, és tegyük fel, hogy benne az i. vendég költözött az $(n + 1)$-es sorszámú szobába (ahol $1 \leq i \leq n$ a feltevés szerint). Tekintsük azt a sorrendet, melyben minden vendég ugyanabba a szobába kerül, kivéve az i. és az utolsó vendéget, mert ezek szobáit felcseréljük (tehát az i. vendég az 1-es szobába, az $n + 1$. vendég pedig az $(n + 1)$-es szobába kerül). Az így kapott sorrend továbbra is a feltételeknek megfelelő, hiszen $i \neq 1$ esetén az i. vendég az eredeti sorrendben sem az i. sorszámú szobába kerül, azaz tetszőlegesen választhat szobát, akár az elsőt is, $i = 1$ esetén pedig az első vendég egyébként is tetszőlegesen választhat. Az i. vendég előtt érkezők továbbra is szabályosan költöznek be, és az utána következők is, hiszen $i < j < (n + 1)$-re a j-edik vendég nem költözhet az $(n + 1)$-es számú szobába, mert ekkor az $n + 1$. vendégnek nem lenne helye (az 1-es és az $(n + 1)$-es szoba is foglalt lenne már, ami nem lehet). Így tehát minden sorrendhez, melyben az $n + 1$. matematikus az 1-es szobába kerül, rendelhető egy olyan, melyben az $(n+1)$-edikbe kerül. Ugyanez a hozzárendelés visszafelé is elvégezhető: ha az $(n+1)$-edik matematikus az $(n+1)$-edik szobába költözik, és az i-edik vendég az egyes szobába, akkor az ő szobáikat kicserélve ismét megfelelő sorrendhez jutunk. Könnyen látható, hogy ezek a hozzárendelések egymás inverzei, így azon sorrendek száma, melyekben az $n+1$. matematikus az egyes sorszámú szobába költözik, ugyanannyi, mint melyekben az $(n+1)$-es számúba, azaz 2^{n-1}. A kettőt összevetve kapjuk, hogy $n+1$ matematikus éppen $2\cdot 2^{n-1}=2^n$-féleképp költözhet be. Ezzel az indukciós lépést beláttuk.

Az eredményt $n=100$ esetén alkalmazva kapjuk, hogy 100 matematikus 2^{99}-féleképp költözhet be.

Schrettner Jakab (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn., 11. évf.)