I. megoldás. Belátjuk, hogy a függvény maximuma $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Ez kisebb, mint $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$, ugyanis a nevezők elhagyása után a számlálókat négyzetre emelve a bal oldal 27, a jobb oldal $17+12\sqrt{2}$, ami legalább 29, lévén $\sqrt{2}$ nagyobb, mint 1. (A két szám kerekítve 2,60 és 2,91.)

A szinusz-függvény kétszeres szögekre vonatkozó szabálya szerint $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$, tehát a bal oldalon az abszolútértéken belüli kifejezés így is felírható:

$$2\sin x + 2\sin x\cos x = 2\sin x(\cos x + 1). \tag{1}$$

Mivel az eredeti egyenlőtlenségben mindkét oldal nemnegatív, a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:

$$4\sin^2 x(\cos x + 1)^2 \le \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}. \tag{2}$$

Mint ismeretes, minden x valós szám esetén $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Tehát $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = (1-\cos x)(1+\cos x)$, amit (2) bal oldalába beírva (4-gyel való osztás után):

$$\begin{aligned}(1-\cos x)(1+\cos x)(\cos x + 1)^2 &\le \frac{27}{16},\\ (1-\cos x)(\cos x+1)^3 &\le \frac{27}{16}.\end{aligned}$$

Mindkét oldalt 3-mal szorozva:

$$(3-3\cos x)(\cos x + 1)^3 \le \frac{81}{16}. \tag{3}$$

A bal oldali négytényezős szorzatban minden tényező nemnegatív, mert $\cos x$ minimuma -1. Ezért felírható a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenség négytényezős alakja:

$$\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} \le \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4},$$

amit negyedik hatványra emelve így is írhatunk:

$$a_1a_2a_3a_4 \le \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^4.$$

Ha a négy tényezőnek a (3) bal oldalán szereplő dolgokat vesszük, akkor azok összege éppen 6, ugyanis a $-3\cos x$ és a 3 darab $\cos x$ kiejti egymást. A jobb oldalon ekkor ennek negyede, azaz $\dfrac{3}{2}$ szerepel a zárójelben, aminek a negyedik hatványa valóban $\dfrac{81}{16}$. Ezzel az állítást beláttuk, tehát egy erősebb felső korlátot adtunk a kifejezésnek.

Egyenlőség lehet (3)-ban, mégpedig akkor, ha $3-3\cos x = \cos x + 1$, azaz $\cos x = \dfrac{1}{2}$. Ekkor visszaírva, az (1)-beli kifejezés értéke valóban

$$2\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{\pm 3\sqrt{3}}{2}$$

szerepel (attól függően, hogy a $\sin x$ a $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ közül melyik értéket veszi fel, de az abszolútérték miatt ez ugyanezt a szélsőértéket adja).

Nyitrai Boglárka (Brüsszel, European School, 11. évf.)

II. megoldás. Legyen $f(x) = 2\sin x + \sin(2x)$. Ennek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0:

$$\begin{aligned}f'(x) = 2\cos x + \cos(2x)\cdot 2 &= 0,\\ \cos x + \cos(2x) &= 0,\\ \cos(2x) &= -\cos x,\\ \cos(2x) &= \cos(\pi - x).\end{aligned}$$

Vagyis $2x = \pi - x + k\cdot 2\pi$ (ahol $k\in\mathbb{Z}$), vagy pedig $2x = x - \pi + l\cdot 2\pi$ (ahol $l\in\mathbb{Z}$). Az első esetben $x = \dfrac{\pi}{3} + k\cdot\dfrac{2\pi}{3}$, a másodikban pedig $x = -\pi + l\cdot 2\pi$. Ez utóbbi megoldáshalmazt tartalmazza az előbbi, így külön vizsgálni szükségtelen.

Mivel a koszinusz függvény értékeit periodikusan veszi föl, periódusa pedig $\omega = 2\pi$, így elég a $[0; 2\pi)$ intervallumon táblázatot készíteni.

$x \in$	$\left[0; \frac{\pi}{3}\right)$	$\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$	$\left(\frac{\pi}{3}; \pi\right)$	$\{\pi\}$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0
$f'(x)$	$\nearrow$	lokális maximum	$\searrow$	inflexiós pont
$x \in$	$\left(\pi; \frac{5\pi}{3}\right)$	$\frac{5\pi}{3}$	$\left(\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right)$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\searrow$	lokális minimum	$\nearrow$	

Tehát $f(x)$ maximális csak $\left(\frac{\pi}{3} + m \cdot 2\pi\right)$-nél, minimális csak $\left(\frac{5\pi}{3} + n \cdot 2\pi\right)$-nél lehet (ahol $m, n \in \mathbb{Z}$).

$$f\left(\frac{\pi}{3} + m \cdot 2\pi\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\frac{\pi}{3} + \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$
$$f\left(\frac{5\pi}{3} + n \cdot 2\pi\right) = f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 2\sin\frac{5\pi}{3} + \sin\left(2 \cdot \frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Mivel $\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}598$ és $\frac{3+2\sqrt{2}}{2} \approx 2{,}914$, így $\left|f(x)\right| \le \frac{3\sqrt{3}}{2} < \frac{3+2\sqrt{2}}{2}$, vagyis

$$\left|2\sin x + \sin(2x)\right| < \frac{3+2\sqrt{2}}{2},$$

és pontosan ezt szerettük volna belátni.

Spányik Teodor (Budapest, Képző- és Iparművészeti Szakgimn. és Koll., 12. évf.)

Megjegyzések. 1. A leggyakoribb hiba az volt, hogy a megoldó feltette, hogy a bal oldali két tagú összeg akkor maximális, ha valamelyik tag maximális (azaz azt a két esetet vizsgálta meg, amikor $2\sin x$ maximális vagy $\sin(2x)$ maximális).

2. Sok helyen hiányzott a kiszámolt szélsőértékek és a jobb oldali szám értéke közötti egyenlőtlenség igazolása.