I. megoldás.

$$3\cdot 4^k = 3(3+1)^k = 3\left(3^k + \binom{k}{1}3^{k-1} + \binom{k}{2}3^{k-2} + \ldots + \binom{k}{k-1}3^1 + 1\right) =$$
$$= 3(3n+1) = 9n+3$$

(mivel a 3^k, 3^{k-1}, 3^{k-2}, $\ldots$, 3^1 számok mindegyike osztható 3-mal, ezért az összeg is osztható 3-mal, így felírható $3n$ alakban, ahol n természetes szám).

A számtani sorozat elemei $a_m = 3 + 9(m-1)$ alakúak. A sorozat tartalmaz minden olyan természetes számot, amely 9-cel osztva 3-at ad maradékul, tehát az összes $3\cdot 4^k$ alakú számot is, hiszen azok is 9-cel osztva 3 maradékot adnak.

Bérczi Péter (Szegedi Deák Ferenc Gimn., 9. évf.)

Megjegyzés. Több megoldó felismerte, hogy (a_m) minden tagja 9-cel osztva 3-at ad maradékul, és ebből következtetett arra, hogy ha $3\cdot 4^k$ is ilyen alakú minden k-ra, akkor kész az állítás bizonyítása. Ez így viszont nem igaz. A megállapítás akkor helyes, ha a megoldó azt veszi észre, hogy a_m *minden* olyan pozitív egész számot tartalmaz, mely 9-cel osztva 3-at ad maradékul. Ebből már következik, hogy ha $3\cdot 4^k$ is ilyen alakú, akkor minden k-ra tagja a sorozatnak.

II. megoldás. $a_1 = 3$, $d = 9$: a sorozat tagjai $3 + 9n$ alakúak, ahol n természetes szám. Belátjuk, hogy minden k esetén van megfelelő n.

$$\begin{aligned} 3\cdot 4^k &= 3 + 9n,\\ 3\cdot 4^k &= 3(3n+1),\\ 4^k &= 3n+1,\\ 4^k - 1 &= 3n,\\ (2^k+1)(2^k-1) &= 3n. \end{aligned}$$

Ha k páratlan, akkor a (2^k+1) tényezőből, ha pedig páros, akkor a $(2^k-1) = \left(2^{2m}-1\right) = (4^m-1)$ tényezőből emelhető ki a 3, tehát a két tényező szorzata mindig osztható 3-mal, és így bármely k esetén van megfelelő n természetes szám.

Német Franciska (Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 10. évf.)

III. megoldás. A számtani sorozat első tagja $a_1 = 3$, differenciája $d = 9$, általános tagja $a_n = 3 + (n-1)\cdot 9$. A sorozat első hat tagja: 3; 12; 21; 30; 39; 48. Teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $k = 0$, akkor $3\cdot 4^0 = 3$; ha $k = 1$, akkor $3\cdot 4^1 = 12$, ha $k = 2$, akkor $3\cdot 4^2 = 48$ – vagyis ezekben az esetekben igaz az állítás.

Most belátjuk, hogy ha $3\cdot 4^k$ tagja a sorozatnak, akkor $3\cdot 4^{k+1}$ is tagja.

$$3\cdot 4^{k+1} - 3\cdot 4^k = 3\cdot 4^k(4-1) = 3\cdot 4^k\cdot 3 = 9\cdot 4^k.$$

Mivel $3\cdot 4^{k+1}$ és $3\cdot 4^k$ különbsége 9 többszöröse, ezért ha $3\cdot 4^k$ tagja a fenti sorozatnak, akkor $3\cdot 4^{k+1}$ is tagja.

Tehát minden k-ra teljesül, hogy $3\cdot 4^k$ tagja az $a_n = 3 + (n-1)\cdot 9$ sorozatnak.

Szalontai Kinga Sára (Budapest, Deák Téri Evangélikus Gimn., 10. évf.)