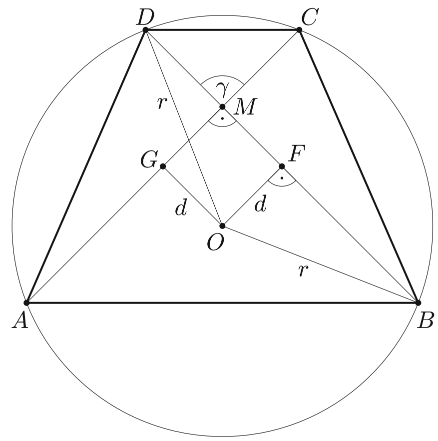
I. megoldás. Használjuk az *1. ábra* jelöléseit és legyen a BD átló felezőpontja az F, az AC átlóé a G pont, az átlók metszéspontja M, végül $DMC\sphericalangle = \gamma$. A kör sugara $r = 13$ cm, az átlók távolsága a kör középpontjától $OF = OG = d = 5$ cm.



1. ábra

A trapéz átlói a körben húrok. A húr felező merőlegese átmegy a középponton, így $OFB\sphericalangle = 90°$. A Pitagorasz-tételt felírva az OFB derékszögű háromszögben:

$$\begin{aligned} BF = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \\ = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}, \end{aligned}$$

ebből pedig

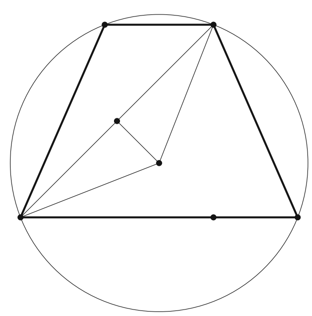
$$AC = BD = 2BF = 24 \text{ cm}.$$

A trapéz területe tehát:

$$T = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 24 \cdot \sin\gamma = 288 \cdot \sin\gamma.$$

Mivel sin γ értéke legfeljebb 1, ezért a terület akkor maximális, ha sin $\gamma = 1$, vagyis $\gamma = 90°$. Ekkor a terület: $T_{\max} = 288$ cm^2.

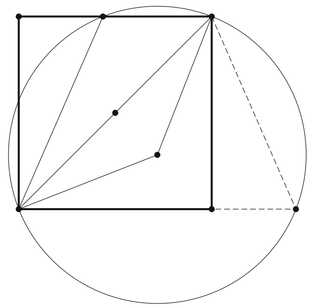
II. megoldás. A kör sugara 13 cm, a kör középpontjától a húrnégyszög átlói 5 cm távol vannak. Rajzoljuk be az egyik átlót, és a végpontjait kössük össze a kör középpontjával (*2. ábra*)



2. ábra

Az így keletkezett két vonal egyenlő hosszú, hiszen mindkettő a kör sugara, tehát az átlóval egy egyenlő szárú háromszöget alkotnak. A háromszöget felezzük el az alapjával szemközti csúcsból húzott magassággal. Az így kapott háromszögek derékszögűek, hiszen két oldaluk merőleges egymásra, és egybevágók, mivel oldalaik páronként egyenlő hosszúak. Egy ilyen derékszögű háromszög egyik befogója a kör középpontjának és a húrnégyszög egyik átlójának távolsága, tehát 5 cm hosszú, a befogója a kör sugara, tehát 13 cm hosszú, így a másik befogó, ami az átló fele, a Pitagorasz-tételből számolható: 12 cm hosszú.

Egy húrnégyszög átlói egyenlő hosszúak, tehát a húrnégyszög mindkét átlója 24 cm hosszú. A húrnégyszög átdarabolható egy olyan téglalappá, amelynek egyik átlója megegyezik a húrnégyszög egyik átlójával (*3. ábra*).



3. ábra

Egy téglalap két szomszédos oldalára és egy átlójára szintén felírható a Pitagorasz-tétel, mely szerint a két szomszédos oldal hosszának négyzetösszege egyenlő az átfogó hosszának négyzetével. Ugyanezen két oldal hosszának szorzata egyenlő a téglalap, és így a húrnégyszög területével is. A két oldalt a-val és b-vel jelölve írjuk fel a mértani és a négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{ab} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \frac{24}{\sqrt{2}},$$

$$ab \leq \frac{24^2}{2}.$$

Az egyenlőtlenség szerint két adott négyzetösszegű szám szorzata akkor a legnagyobb, ha a két szám egyenlő, tehát a maximális területű téglalapban a két szomszédos oldal egyenlő hosszú, vagyis a téglalap négyzet. Egy négyzet területe az átlók szorzatának fele, esetünkben $\frac{24^2}{2} = 288\ \mathrm{cm}^2$.

Tehát a húrnégyszög területének maximális értéke $288\ \mathrm{cm}^2$.

Czett Mátyás (Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimn., 10. évf.)