Ha $p=2$, akkor a p hosszúságú, egész koordinátájú vektorok kizárólag a $(\pm p,0,0)$, $(0,\pm p,0)$, $(0,0,\pm p)$ vektorok lehetnek, amiből pontosan hat db van. A továbbiakban feltesszük tehát, hogy $p\ge 3$. Figyeljük meg, hogy ha valamelyik $\mathbf{v}_j$ vektor mindhárom koordinátája p-vel osztható, akkor a feladatbeli feltétel szerint valamely $0<\ell<p$ esetén a $\mathbf{v}_j-\ell\cdot\mathbf{v}_k$ vektor mindhárom koordinátája osztható p-vel. Ekkor azonban az $\ell\cdot\mathbf{v}_k$ vektornak, következésképp a $\mathbf{v}_k$ vektornak is mindhárom koordinátája osztható p-vel, tehát a $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ vektorok mindegyikére ugyanez igaz. Tekintettel arra, hogy a p hosszúságú, p-vel osztható egész koordinátájú vektorok csupán hatfélék lehetnek (konkrétan $(\pm p,0,0)$, $(0,\pm p,0)$, $(0,0,\pm p)$), ezért feltehetjük, hogy a $\mathbf{v}_j$ vektorok egyikének sem osztható mindhárom koordinátája p-vel.

A feladatbeli feltétel miatt tetszőleges $1\le j<k\le n$ esetén létezik olyan $p\nmid\ell$ egész, amelyre az $\mathbf{u}=(\mathbf{v}_j-\ell\cdot\mathbf{v}_k)/p$ vektor mindhárom koordinátája egész. Ekkor (az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorok skaláris szorzatát $(\mathbf{x},\mathbf{y})$-nal jelölve)

$$\begin{aligned}|\mathbf{v}_j|^2&=(\mathbf{v}_j,\mathbf{v}_j)=(p\cdot\mathbf{u}+\ell\cdot\mathbf{v}_k,p\cdot\mathbf{u}+\ell\cdot\mathbf{v}_k)=\\&=p^2\cdot(\mathbf{u},\mathbf{u})+2p\ell\cdot(\mathbf{u},\mathbf{v}_k)+\ell^2\cdot(\mathbf{v}_k,\mathbf{v}_k)=\\&=p^2\cdot|\mathbf{u}|^2+2p\ell\cdot(\mathbf{u},\mathbf{v}_k)+\ell^2\cdot|\mathbf{v}_k|^2,\end{aligned}$$

azaz

$$-2p\ell\cdot(\mathbf{u},\mathbf{v}_k)=p^2\cdot|\mathbf{u}|^2+\ell^2\cdot|\mathbf{v}_k|^2-|\mathbf{v}_j|^2=p^2\cdot|\mathbf{u}|^2+\ell^2\cdot p^2-p^2=p^2\big(|\mathbf{u}|^2+\ell^2-1\big).$$

Mivel $p>2$ és $|\mathbf{u}|^2=(\mathbf{u},\mathbf{u})$ egész, ezért a fenti egyenlőség bal oldala is p^2 többszöröse, tehát $p\mid(\mathbf{u},\mathbf{v}_k)$. Ekkor

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}_j,\mathbf{v}_k)&=(p\cdot\mathbf{u}+\ell\cdot\mathbf{v}_k,\mathbf{v}_k)=p(\mathbf{u},\mathbf{v}_k)+\ell(\mathbf{v}_k,\mathbf{v}_k)=\\&=p(\mathbf{u},\mathbf{v}_k)+\ell\cdot|\mathbf{v}_k|^2=p(\mathbf{u},\mathbf{v}_k)+\ell\cdot p^2,\end{aligned}$$

így $p\mid(\mathbf{u},\mathbf{v}_k)$ okán $p^2\mid(\mathbf{v}_j,\mathbf{v}_k)$. Azonban $\big|(\mathbf{v}_j,\mathbf{v}_k)\big|\le|\mathbf{v}_j|\cdot|\mathbf{v}_k|=p^2$ miatt $(\mathbf{v}_j,\mathbf{v}_k)$ csak $\pm p^2$ vagy 0 lehet. Ezért ha $\mathbf{v}_j$ és $\mathbf{v}_k$ nem párhuzamosak, akkor bizonyosan merőlegesek egymásra.

Azt kaptuk tehát, hogy a $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n$ vektorok meghatározta irányok páronként merőlegesek, ezért legfeljebb három ilyen irány lehetséges. Minthogy az azonos irányt meghatározó vektorok egymás ellentettjei, ezért minden irányt legfeljebb két vektor határoz meg, innen pedig közvetlenül adódik a bizonyítandó $n\le 6$ állítás.

$\square$

Megjegyzés. Ha $p=k^2+k+1$ valamely k pozitív egészre, akkor megadható hat olyan vektor, amelyek teljesítik a feladatbeli követelményeket, és egyikük sem párhuzamos a koordinátatengelyekkel. Könnyű ellenőrizni, hogy például a $\big(k,k+1,k(k+1)\big)$, $\big(k+1,-k(k+1),k\big)$, illetve $\big(-k(k+1),-k,k+1\big)$ ilyen vektorhármast alkot.

Általánosságban az igaz, hogy a 2 és az 5 kivételével minden p prímre létezik hat vektor a fenti tulajdonsággal. A részletekért ld. az **A. 744.,** ehavi számunkban kitűzött feladatot.