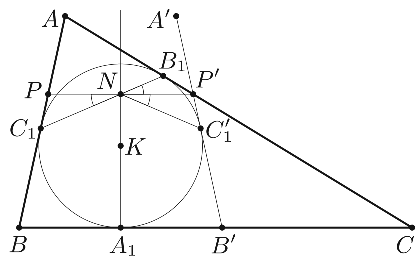
I. megoldás. Ha $|AB| = |AC|$, akkor az ábra szimmetrikus az A-ból induló magasságra, amely egyben súlyvonal is. Ezért az A_1 és az M pont is ezen a szimmetriatengelyen fekszik, így az állítás triviális.

A továbbiakban feltesszük, hogy $|AB| \neq |AC|$. Ekkor az A-ból induló szögfelező nem merőleges a BC oldalra, tehát az AB-nek egy, a BC-re merőleges egyenesre vett tükörképe nem párhuzamos AC-vel.

Legyen K az ABC háromszög beírt körének középpontja, és jelölje A', B' és C_1' rendre az A, B, illetve C_1 pontoknak az A_1K egyenesre vett tükörképét. Láttuk, hogy AC és $A'B'$ nem párhuzamosak, ezért egyértelműen létezik az AC és $A'B'$ egyeneseknek egy P' metszéspontja. Legyen P a P'-nek az A_1K-ra vett tükörképe, valamint jelölje N a PP' és A_1K metszéspontját (*1. ábra*).



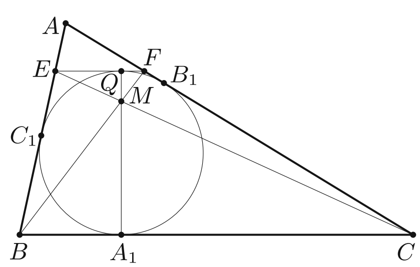
1. ábra

Ekkor $KNP'\sphericalangle = 90^\circ$ a tükrözés miatt, illetve $KB_1P'\sphericalangle = KC_1'P'\sphericalangle = 90^\circ$, hiszen $P'B_1$ és $P'C_1'$ a beírt kör érintői. Ezek szerint K, N, B_1, P' és C_1' egy k körön vannak, konkrétan a KP' Thálesz-körén. Ezen k körnek $P'B_1$ és $P'C_1'$ egyenlő hosszúságú húrjai (mivel mindkét szakasz a beírt körnek ugyanabból a P' külső pontból húzott érintője), tehát k-ban ugyanakkora kerületi szögek tartoznak hozzájuk: $B_1NP'\sphericalangle = C_1'NP'\sphericalangle = C_1NP\sphericalangle$; az utóbbi egyenlőség a tükrözés miatt igaz. Ezek szerint N illeszkedik a C_1B_1 szakaszra.

$BC \perp A_1K \perp PP'$ miatt $BC \parallel PP'$ és $|PN| = |P'N|$ a tükrözésből adódóan. Alkalmas, A-ból végzett középpontos hasonlóság tehát PP'-t BC-be és N-et a BC szakasz felezőpontjába viszi. Ez pedig azt jelenti, hogy N rajta van az ABC háromszög A-ból induló súlyvonalán. Az N pont tehát megegyezik a B_1C_1 szakasznak és az ABC háromszög A-ból induló súlyvonalának metszéspontjával, M-mel, ahonnan $A_1M = A_1N \perp BC$ adódik. Nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolunk. $\square$

Az alábbiakban közöljük Egri Máté rendkívül szellemes megoldásának vázlatát is.

II. megoldás. Jelölje Q az ABC háromszög beírt körének A_1-gyel átellenes pontját, és legyenek rendre E és F a beírt körhöz Q-ban húzott (és BC-vel párhuzamos) érintőnek az AB és AC oldalakkal vett metszéspontjai (*2. ábra*).



2. ábra

Azt fogjuk megmutatni, hogy az M pont egyrészt megegyezik EC és BF metszéspontjával, másrészt, hogy illeszkedik az A_1Q szakaszra.

A konstrukció folytán $EBCF$ trapéz, így átlóinak metszéspontját a szárak metszéspontjával (azaz A-val) összekötő egyenes felezi az alapokat. Ez azt jelenti, hogy EC és BF metszéspontja illeszkedik az A-ból induló súlyvonalra.

A továbbiakban a jól ismert Brianchon-tételre támaszkodunk, amely szerint egy érintőhatszög szemközti csúcsait összekötő három átló egy ponton halad át. A tételt abban az elfajuló esetben alkalmazzuk, amikor az érintőhatszög bizonyos csúcsai a hatszög beírt körén vannak.

Ilyenformán az EC_1BCB_1F elfajuló érintőhatszög fenti tulajdonsága alapján C_1B_1 tartalmazza EC és BF metszéspontját, amely – mint láttuk – az A-ból induló súlyvonalon van. Tehát EC és BF valóban az M pontban metszik egymást. Az EBA_1CFQ érintőhatszögre pedig az adódik, hogy A_1Q is tartalmazza M-et. A feladat állítása innen közvetlenül adódik. $\square$