I. megoldás. Először a következő segédtételt igazoljuk: minden $x>1$ valós számra

$$\ln\ x+\sqrt{\frac{1}{x}}<\sqrt{x}.$$

Bizonyítás: Ha $x>0$, akkor az

$$f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{x}}-\ln\ x$$

függvény deriváltjára

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x^3}}-\frac{1}{x}=\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\cdot\left(x+1-2\sqrt{x}\,\right)=\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)^2\geq 0,$$

ahol egyenlőség csak $x=1$ esetén teljesülhet. Ennélfogva $f(x)$ pozitív x-ekre szigorúan monoton nő, így minden $x>1$ esetén

$$f(x)>f(1)=0,\quad \text{azaz}\quad \sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{x}}-\ln\ x>0,$$

amivel az állításunkat igazoltuk.

Mivel minden $1\leq k$ egész szám esetén $\dfrac{k+1}{k}>1$, a most belátott segédtétel alapján

$$\ln\frac{k+1}{k}+\sqrt{\frac{k}{k+1}}<\sqrt{\frac{k+1}{k}},$$

amit minden $1\leq k<n$-re összegezve

$$\sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{k+1}{k}+\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{k+1}}<\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{\frac{k+1}{k}}.$$

Itt a

$$\sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{k+1}{k}=\sum_{k=1}^{n-1}\ln(k+1)-\ln\ k$$

összeg teleszkopikusan $\ln\ n$-nel egyenlő, vagyis

$$\ln\ n+\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{k+1}}<\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{\frac{k+1}{k}}$$

minden $n>1$ egész esetén, ami éppen a feladat állítása.

Daróczi Sándor (Nyíregyháza, Krúdy Gy. Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. Az n szerinti indukcióval bizonyítunk; ha $n=2$, akkor $\ln\ 2+\sqrt{\frac{1}{2}}<\sqrt{2}$ teljesülése közvetlen számolással ellenőrizhető. Az indukciós lépésben megmutatjuk, hogy $n-1$-ről n-re lépve a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldala kevesebbel nő, mint a jobb oldal, vagyis

$$\ln\ n-\ln(n-1)+\sqrt{\frac{n-1}{n}}<\sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

A fenti egyenlőtlenség azonos átalakításával és az $x=\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}$ jelölést bevezetve:

$$\ln x^2+\frac{1}{x}<x,$$
$$0<x-\frac{1}{x}-2\ln\ x.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség igazolásához elegendő megmutatni, hogy a $g(x)=x-\dfrac{1}{x}-2\ln\ x$ függvény deriváltja pozitív, ha $x>1$. Valóban: $g(1)=0$, és minden $x>1$-re

$$g'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\left(1-\frac{1}{x}\right)^2>0.$$

Győrffy Ágoston (Budapest, Fazekas M. Gimn., 11. évf.)