I. megoldás. Nevezzük *bandának* (n-dimenziós, $-1, 0, 1$ számokból álló) vektorok egy olyan háromelemű halmazát, amelyben a három vektor összege 0. Legyen $\oplus$ az a tetszőleges n és m dimenziójú a és b vektorokra értelmezett művelet, amelynek eredménye az az $n+m$ dimenziójú vektor, amelynek első n koordinátája megegyezik a koordinátáival, a további koordinátái pedig b koordinátáival. Az n szerinti indukcióval megmutatjuk, hogy az összes n-dimenziós (0, ± 1 elemű) vektorok halmaza 3^{n-1} darab, páronként diszjunkt banda egyesítése. Az $n=1$ esetén ez nyilvánvalóan igaz: egyetlen banda van, a $\{-1,0,1\}$. Tegyük föl, hogy $n=k$-ra igaz az állítás. Az $n=k+1$-re belátandó tekintsünk egy, az $n=k$ esethez tartozó felosztásban szereplő $\{A,B,C\}$ bandát; ebből a következő, $n=k+1$ dimenziós bandákat hozzuk létre:

$$\{A\oplus 0, B\oplus 1, C\oplus -1\},\ \{A\oplus -1, B\oplus 0, C\oplus 1\},\ \{A\oplus 1, B\oplus -1, C\oplus 0\}.$$

Ezzel (az indukciós feltevés alapján) $3\cdot 3^{k-1}=3^k$ darab $k+1$ dimenziós bandát konstruáltunk, amelyek páronként diszjunktak, így összesen $3\cdot 3^k=3^{k+1}$ darab különböző vektort tartalmaznak, tehát az összeset.

A feladat állítása ebből már egyszerűen következik, hiszen a követelmény szerint minden bandából legfeljebb két vektort választhatunk, és a bandák száma 3^{n-1}.

A bizonyított becslés éles: ha az összes olyan vektort tekintjük, aminek az első koordinátája 1 vagy -1, a többi pedig (0, 1 és -1 közül választva) tetszőleges, akkor ezek száma éppen $2\cdot 3^{n-1}$, és semelyik háromnak az összege nem nulla.

Noszály Áron (Debrecen, Fazekas Mihály Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. Az I. megoldásban bandáknak nevezett hármas csoportokba sorolást egyszerűbben is kaphatunk a következő módon. Mindegyik (n dimenziós, a 0, 1, -1 elemekből képzett) vektorhoz adjuk hozzá a csupa 1-esből álló (n dimenziós) $\mathbf{e}$ vektort, a koordináták összeadását modulo 3 végezve. (Vagyis $0+1=1$, $-1+1=0$, $1+1=-1$ szerint.) Ezzel páronként diszjunkt, $\{\mathbf{v}, \mathbf{v}+\mathbf{e}, \mathbf{v}-\mathbf{e}\}$ típusú vektor-hármasokhoz jutunk, amelyek elemei a bennük levő bármelyik vektorból az $\mathbf{e}$ legfeljebb kétszeri hozzáadásával előállíthatók, a három vektor összege pedig $\mathbf{v}+(\mathbf{v}+\mathbf{e})+(\mathbf{v}-\mathbf{e})=3\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

Schifferer András (Kaposvár, Táncsics Mihály Gimn., 12. évf.)