A mértani sorozat összegképletének többszöri alkalmazásával juthatunk az összeg zárt alakjához:

$$\begin{aligned}
&1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\ldots+n\cdot 2^{n-1}=\\
&=(2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{n-1})+(2^1+2^2+\ldots+2^{n-1})+\\
&\quad+(2^2+\ldots+2^{n-1})+\ldots+(2^{n-1})=\\
&=(2^n-1)+(2^n-2)+(2^n-2^2)+\ldots+(2^n-2^{n-1})=\\
&=n\cdot 2^n-(1+2+2^2+\ldots+2^{n-1})=n\cdot 2^n-(2^n-1)=\\
&=(n-1)\cdot 2^n+1.
\end{aligned}$$

Ezzel a feladat követelménye a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned}
(n-1)\cdot 2^n+1&=k^2,\quad\text{azaz}\\
(n-1)\cdot 2^n&=k^2-1=(k+1)\cdot(k-1).
\end{aligned}$$

Itt az azonos paritású $(k+1)$ és $(k-1)$ szorzata páros lévén mindkét szám páros, és mivel a különbségük 2, azért valamelyikük nem osztható 4-gyel. Tehát vagy $k+1=2^{n-1}t$ (ahol t páratlan) és $k-1=2\cdot\dfrac{n-1}{t}$, vagy $k+1=2s$ (ahol s páratlan) és $k-1=2^{n-1}\cdot\dfrac{n-1}{s}$. Az első esetben

$$\begin{aligned}
2=(k+1)-(k-1)&=2^{n-1}t-2\cdot\frac{n-1}{t},\\
2t&=2^{n-1}t^2-2(n-1),\\
n-1&=t(2^{n-2}t-1)\geq 2^{n-2}-1.
\end{aligned}$$

A másik esetben hasonlóan

$$\begin{aligned}
2=(k+1)-(k-1)&=2s-2^{n-1}\cdot\frac{n-1}{s},\\
2s&=2s^2-2^{n-1}(n-1),\\
2^{n-2}(n-1)&=s^2-s=s(s-1),
\end{aligned}$$

amiből (mivel s páratlan lévén osztója $(n-1)$-nek) $s(s-1)<(n-1)^2$, és így $2^{n-2}<n-1$ következik. Ennek alapján $n\geq 2^{n-2}$, ami csak $n\leq 4$ esetén teljesül. Az n számára szóbajövő négy értéket kipróbálva csak $n=1$ és $n=4$ felel meg; előbbire $(n-1)\cdot 2^n+1=1^2$, utóbbira pedig $(n-1)\cdot 2^n+1=7^2$.

Schifferer András (Kaposvári Táncsics Mihály Gimn., 12. évf.) és
Kupás Vendel Péter (Gyöngyös, Berze Nagy János Gimn., 12. évf.)
megoldását felhasználva