Először igazolunk egy lemmát.

Lemma. *Legyenek* $0 \le a \le 1$ *és* b *valós számok, valamint*

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}.$$

Ekkor $f(a,b) \le f(0,b)$*, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha* $a=0$ *vagy* $a=1$ *vagy* $b=0$*.*

A honlapunkon[1] megadtunk egy, a lemmával ekvivalens geometriai állítást, és annak a geometriai bizonyítását. Most megmutatjuk, számolással hogyan érhetünk célt. Az állítás átrendezéssel a következő alakban írható:

$$\sqrt{1+b^2}-\sqrt{(1-a)^2+b^2} \ge \sqrt{a^2+b^2}-|b|.$$

Az a-ra tett feltevésünk szerint mindkét oldal nemnegatív, ezért a négyzetreemelés ekvivalens átalakítás. A műveletek elvégzése után kapjuk, hogy

$$\begin{gathered}1+b^2+1-2a+a^2+b^2-2\sqrt{1+b^2}\sqrt{(1-a)^2+b^2} \ge \\ \ge a^2+b^2+b^2-2|b|\sqrt{a^2+b^2}\,.\end{gathered} \tag{1}$$

Az egyszerűsítések után vezessük be a $c=1-a$ jelölést (nyilván $0 \le c \le 1$), így rendezéssel (1) a következő alakra hozható:

$$c+|b|\sqrt{(1-c)^2+b^2} \ge \sqrt{1+b^2}\sqrt{c^2+b^2}\,.$$

Ismét mindkét oldal nemnegatív, ezért újra négyzetre emelhetünk:

$$c^2+b^2(1-c)^2+b^4+2|b|c\sqrt{(1-c)^2+b^2} \ge c^2+b^2+b^2c^2+b^4.$$

Egyszerűsítések és rendezés után $2|b|c\sqrt{(1-c)^2+b^2} \ge 2b^2c$ adódik. Mivel $2|b|c \ge 0$, így két eset van: ha $2|b|c=0$, akkor $b=0$ vagy $a=1$ és egyenlőség áll. Egyébként $2|b|c>0$ és oszthatunk vele:

$$\sqrt{(1-c)^2+b^2} \ge |b|.$$

Ismét mindkét oldal nemnegatív, és újabb négyzetreemelés után a nyilvánvaló $(1-c)^2 \ge 0$ egyenlőtlenséghez jutunk. Itt egyenlőség $a=0$ esetben áll. Mivel csupa ekvivalens átalakítást végeztünk, így az eredeti állítást, és ezzel a lemmát beláttuk.

Válasszuk úgy a koordinátarendszerünket, hogy az egységnégyzet csúcsai legyenek $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ és $D(0,1)$; továbbá legyen $P(x,y)$, ahol $0 \le x,y \le 1$. Ekkor

$$\begin{gathered}PA+PB+PC+PD= \\ =\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}+\sqrt{x^2+(1-y)^2}= \\ =f(x,y)+f(x,1-y).\end{gathered}$$

A lemmát alkalmazva, majd kihasználva, hogy $0 \le y \le 1$ kapjuk, hogy

$$\begin{gathered}f(x,y)+f(x,1-y) \le f(0,y)+f(0,1-y)= \\ =\sqrt{y^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{(1-y)^2}+\sqrt{1+(1-y)^2}= \\ =y+1-y+f(y,1)=1+f(y,1).\end{gathered}$$

Ismét a lemma szerint $f(y,1) \le f(0,1)=1+\sqrt{2}$, amiből az eddigiek szerint $PA+PB+PC+PD \le 2+\sqrt{2}$. Egyenlőség akkor teljesül, ha minden becslésünkben egyenlőség áll, könnyű meggondolni, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha P az egységnégyzet valamely csúcsa.

Borbényi Márton (Kaposvár, Táncsics Mihály Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. Vázolunk egy második lehetséges megoldást, amely felhasznál néhány alapismeretet a kétváltozós függvényekről. Vezessük be a $g(P)=PA+PB+PC+PD$ függvényt. Ismert, hogy egy háromszögben a súlyvonal legfeljebb olyan hosszú, mint a súlyvonalat közrefogó oldalak számtani közepe. Ebből az elemi geometriai tényből azonnal következik, hogy ha a PQ szakasz felezőpontja F, akkor $g(F) \le \big(g(P)+g(Q)\big)/2$, és egyenlőség csak $P=Q$ esetben áll. Mivel a g függvény folytonos, így kaptuk, hogy g szigorúan konvex. A konvexitást kihasználva nem túl nehéz megmutatni, hogy a maximum a csúcsokban lesz, elég arra gondolni, hogy $ABCD$ minden többi pontja belső pontja egy olyan szakasznak, amelynek a végpontjai is $ABCD$ valamely pontjai.

[1] https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=B4878&l=hu.