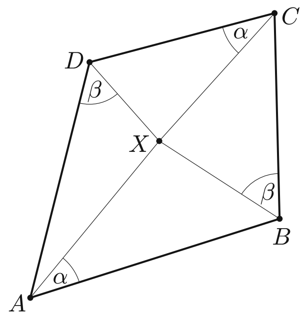
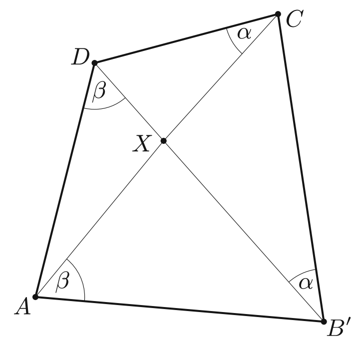
Gáspár Attila megoldása.

Legyen $XAB\sphericalangle = XCD\sphericalangle = \alpha$ és $XBC\sphericalangle = XDA\sphericalangle = \beta$. Vegyük fel a B' pontot az *ábra* szerint úgy, hogy $XB' = \dfrac{XA\cdot XC}{XB}$ és $AXB'\sphericalangle = BXC\sphericalangle$. Ekkor

$$\frac{AX}{B'X} = \frac{AX\cdot XB}{XA\cdot XC} = \frac{XB}{XC}m$$

ezért $AXB' \sim BXC$. Emiatt $B'AX\sphericalangle = CBX\sphericalangle = \beta$, és $AB' = BC\cdot\dfrac{AX}{BX}$.





$$\begin{aligned} B'XC\sphericalangle &= AXB'\sphericalangle + B'XC\sphericalangle - AXB'\sphericalangle = \\ &= AXB\sphericalangle + BXC\sphericalangle - BXC\sphericalangle = AXB\sphericalangle, \quad \text{és} \\ \frac{B'X}{CX} &= \frac{XA\cdot XC}{XB\cdot XC} = \frac{XA}{XB}, \end{aligned}$$

ezért $B'XC \sim AXB$. Így $XB'C\sphericalangle = \alpha$ és $B'C = AB\cdot\dfrac{XC}{XB}$. Látható, hogy $DCB'\sphericalangle = \alpha + XCB'\sphericalangle = 180^\circ - B'XC\sphericalangle$, ezért $\sin DCB'\sphericalangle = \sin BXC'\sphericalangle$. Ebből következik, hogy

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{T_{B'CD}}{T_{XB'C}} &= \frac{DC\cdot CB'\cdot\sin DCB'\sphericalangle}{B'X\cdot XC\cdot \sin B'XC\sphericalangle} = \frac{DC\cdot CB'}{B'X\cdot XC} = \\ &= \frac{DC\cdot AB\cdot\frac{XC}{XB}}{B'X\cdot XC} = \frac{CD\cdot AB}{XB'\cdot XB}. \end{aligned}$$

A területeket másképp felírva

$$(2)\qquad \frac{T_{B'CD\triangle}}{T_{XB'C\triangle}} = \frac{B'D\cdot B'C\cdot\sin CB'D\sphericalangle}{B'X\cdot B'C\cdot\sin\alpha} = \frac{B'D}{B'X}\cdot\frac{\sin CB'D\sphericalangle}{\sin\alpha}.$$

Az (1) és (2) egyenletet összevetve kapjuk, hogy

$$\frac{CD\cdot AB}{XB'\cdot XB} = \frac{B'D}{B'X}\cdot\frac{\sin CB'D\sphericalangle}{\sin\alpha},$$

$$(3)\qquad \frac{CD\cdot AB}{B'D\cdot XB} = \frac{\sin CB'D\sphericalangle}{\sin\alpha}.$$

Hasonlóan látható, hogy

$$(4)\qquad \frac{T_{DAB'\triangle}}{T_{XDA\triangle}} = \frac{AD\cdot AB'}{DX\cdot XA} = \frac{AD\cdot BC}{DX\cdot BX},$$

$$(5)\qquad \frac{T_{DAB'\triangle}}{T_{XDA\triangle}} = \frac{B'D}{DX}\cdot\frac{\sin ADB'\sphericalangle}{\sin\beta}.$$

A (4) és (5) egyenletből kapjuk, hogy

$$\frac{AD\cdot BC}{DX\cdot BX} = \frac{B'D}{DX}\cdot\frac{\sin ADB'\sphericalangle}{\sin\beta},$$

$$(6)\qquad \frac{AD\cdot BC}{B'D\cdot XB} = \frac{\sin ADB'\sphericalangle}{\sin\beta}.$$

$AB \cdot CD = AD \cdot BC$, ezért a (3) és (6) egyenlet miatt

$$\frac{\sin CB'D\sphericalangle}{\sin\alpha} = \frac{\sin ADB'\sphericalangle}{\sin\beta}. \tag{7}$$

Tegyük fel, hogy $X \notin B'D$. A szimmetria miatt feltételezhetjük, hogy X a $B'CD$ háromszögben van. Ekkor $CB'D\sphericalangle > \alpha$, ezért $\sin CB'D\sphericalangle > \sin\alpha$, és $ADB'\sphericalangle < \beta$, ezért $\sin ADB'\sphericalangle < \sin\beta$. Ez ellentmond a (7) egyenletnek. Tehát X a $B'D$ szakaszon van. Ebből a feladat állítása könnyen adódik, mert

$$BXA\sphericalangle + DXC\sphericalangle = B'XC\sphericalangle + CXD\sphericalangle = 180^\circ.$$

Megjegyzés. Ha $0^\circ < \varphi_1 < \varphi_2 < 180^\circ$, akkor csak abban az esetben lehetséges, hogy $\sin\varphi_1 \geq \sin\varphi_2$, ha $\varphi_1 + \varphi_2 \geq 180^\circ$. Látható, hogy $CB'D\sphericalangle + \alpha < CB'D\sphericalangle + \alpha + XCB'\sphericalangle = 180^\circ - B'DC\sphericalangle < 180^\circ$, és hasonlóan $ADB'\sphericalangle + \beta < 180^\circ$. Emiatt ez az eset nem fordulhat elő a fenti bizonyításban.