Matolcsi Dávid megoldása. $S(n)$-nek nevezem a feladatban definiált összeget. $N < n$-re $S(n)$ és $S(n+1)$ is egész, így

$$S(n+1) - S(n) = \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_1}$$

is mindig egész.

Legyen $(a_1, a_n) = x$ és $a_1 = xa'_1$, illetve $a_n = xa'_n$. Ekkor

$$a'_1(S(n+1) - S(n)) = \frac{xa'_n a'_1}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{x} - a'_n$$

egész szám. Tehát

$$\frac{xa'_n a'_1}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{x}$$

is egész.

Legyen most $(a_{n+1}, x) = y$ és $a_{n+1} = ya'_{n+1}$, illetve $x = yx'$. Így

$$\frac{xa'_n a'_1}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{x} = \frac{a'_n a'_1}{a'_{n+1}} + \frac{a'_{n+1}}{x'} = \frac{x'a'_n a'_1 + a'^2_{n+1}}{x'a'_{n+1}}$$

egész. Tehát $x' \mid a'^2_{n+1}$. Másrészt tudjuk, hogy $(a'_{n+1}, x') = 1$. Ez csak úgy lehetséges, ha $x' = 1$, tehát $x = y$, azaz $x \mid a_{n+1}$.

Ezzel általánosan beláttuk, hogy $(a_1, a_k) \mid a_{k+1}$. Másrészt értelemszerűen $(a_1, a_k) \mid a_1$, így $(a_1, a_k) \mid (a_1, a_{k+1})$.

Teljes indukció szerint tehát ha $k < t$, akkor $(a_1, a_k) \mid (a_1, a_t)$.

Mivel a_1-nek csak véges sok osztója van, az (a_1, a_t) sorozat pedig végtelen és monoton növekvő, létezik egy r korlát, amitől kezdve minden $(a_t, a_1) = x$ egyenlő. Így ettől kezdve minden $a_t = xa'_t$, ahol $(a'_t, a'_1) = 1$ (ahol $a_1 = xa'_1$). Ekkor

$$\frac{a_t}{a_{t+1}} + \frac{a_{t+1} - a_t}{a_1} = \frac{a'_t}{a'_{t+1}} + \frac{a'_{t+1} - a'_t}{a'_1} = \frac{a'_t a'_1 + a'^2_{t+1} - a'_t a'_{t+1}}{a'_{t+1} a'_1}$$

egész.

Ez azt jelenti, hogy $a'_{t+1} \mid a'_t a'_1$. Mivel $(a'_{t+1}, a'_1) = 1$, ezért $a'_{t+1} \mid a'_t$. Ez az r korláttól kezdve folyamatosan igaz, így $a'_t \mid a'_r$ és az a'_t sorozat monoton csökkenő. Mivel a'_r-nek csak véges sok osztója van, a végtelen a'_t sorozatnak egy M korlát után minden eleme egyenlő lesz.

Így $M < m$-re minden $a_m = xa'_m$ is egyenlő lesz, ezzel az állítást beláttuk.