

a) A barlang mennyezetéhez és a talajhoz rögzített rugó megnyúlása terheletlen (denevérmentes) állapotban $\ell - d$. Amikor a rugó közepére rárepül és a rugóba kapaszkodik egy m tömegű, kis méretű denevér, akkor tekinthetjük az elrendezést úgy, mintha a rugót még a nyújtatlan állapotában félbevágtuk volna két, egyenként $d/2$ hosszúságú részre. Ha az egyik részt felül, a másikat alul rögzítjük, majd középen összekötjük őket, akkor mindkét rugódarab megnyúlása $(\ell - d)/2$ lesz.

A félbevágott rugó egy-egy részének a rugóállandója $2D$, hiszen ugyanakkora erő hatására csak fele akkoraat változik meg a hossza, mint az eredeti rugó tette volna. Ha a denevér súlya hatására (a kialakuló új egyensúlyi állapotban) a felső rugó megnyúlása x értékkel nő, az alsó rugóé ugyanennyivel csökken, akkor a denevérré ható erők egyensúlyi egyenlete:

$$2D \left(\frac{\ell - d}{2} + x \right) = 2D \left(\frac{\ell - d}{2} - x \right) + mg.$$

Eszerint a denevér (a rezgések lecsillapódása után)

$$x = \frac{mg}{4D}$$

távolsággal kerül mélyebbre a barlang közepénél, a talajtól $\frac{\ell}{2} - \frac{mg}{4D}$ távolságban lesz egyensúlyban.

b) Innen a denevér lassan, óvatosan (elkerülve, hogy a rugó rezgésbe vagy lengésbe jöjjön) felmászik a rugónak egy olyan pontjáig, amelynél kapaszkodva a kialakuló egyensúlyi helyzete éppen a barlang közepénél lesz. Legyen ebben a helyzetben a denevér felett az egész rugó p -ed része (vagyis nyújtatlan állapotban d/p hosszúságú darabja), a denevér alatt pedig nyújtatlanul $d - (d/p)$ hosszúságú rugódarab. p itt egy 1-nél nagyobb, később meghatározandó szám.

A nyújtatlanul d/p hosszúságú rugó rugóállandója

$$D^{(\text{felső})} = pD,$$

a másik darabé pedig

$$D^{(\text{alsó})} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} D = \frac{p}{p - 1} D$$

lesz, hiszen a megrövidített rugók erőssége a hosszukkal fordított arányban növekszik. A denevér egyensúlyi állapotában a rugóerők és a nehézségi erő egyensúlyba kerülnek:

$$pD \left(\frac{\ell}{2} - \frac{d}{p} \right) = \frac{p}{p - 1} D \left(\frac{\ell}{2} - \frac{p - 1}{p} d \right) + mg,$$

vagyis (algebrai átalakítások után):

$$\frac{p - 2}{p - 1} p = 2 \frac{mg}{D\ell}.$$

Ennek a p -re nézve másodfokú egyenletnek a számunkra megfelelő (1-nél nagyobb) megoldása:

$$p = 1 + \frac{mg}{D\ell} + \sqrt{1 + \left(\frac{mg}{D\ell} \right)^2}.$$

Érdekes, hogy a fenti képlet nem tartalmazza a feszítetlen rugó hosszát (d -t).

A denevérnek legalább annyi munkát kell végeznie, amennyivel összességében növekszik a saját helyzeti energiája és a két rugó rugalmas energiája a mászás során. A helyzeti energia változása:

$$E^{(\text{helyzeti})} = mgx = \frac{m^2 g^2}{4D}.$$

A felső rugó rugalmas energiája kezdetben:

$$E_1^{(\text{felső})} = \frac{1}{2} \cdot 2D \left(\frac{\ell - d}{2} + x \right)^2,$$

az alsó rugó rugalmas energiája kezdetben:

$$E_1^{(\text{alsó})} = \frac{1}{2} \cdot 2D \left(\frac{\ell - d}{2} - x \right)^2,$$

a felső rugó rugalmas energiája a végállapotban:

$$E_2^{(\text{felső})} = \frac{1}{2} \cdot (pD) \left(\frac{\ell}{2} - \frac{d}{p} \right)^2,$$

és végül az alsó rugó rugalmas energiája a végállapotban:

$$E_2^{(\text{alsó})} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{p}{p-1} D \right) \left(\frac{\ell}{2} - d \frac{p-1}{p} \right)^2.$$

A szükséges munka:

$$W \geq E^{(\text{helyzeti})} + (E_2^{(\text{felső})} - E_1^{(\text{felső})}) + (E_2^{(\text{alsó})} - E_1^{(\text{alsó})}),$$

amit algebrai átalakítások és p korábban kiszámított értékének behelyettesítése után így is fel lehet írni:

$$W \geq \frac{m^2 g^2}{8D} + \frac{mg\ell}{4} \frac{p-2}{p} = \frac{(mg)^2}{8D} + \frac{D\ell^2}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{m^2 g^2}{D^2 \ell^2}} - 1 \right).$$

(Érdekes, hogy ez a képlet sem tartalmazza d -t, a rugó nyújtatlan hosszát.)

Markó Gábor (Győr, Révai Miklós Gimn., 11. évf.)