a) Az $f(x)$ polinom együtthatói racionális számok; ennek okára a megjegyzésben térünk vissza.

Tegyük fel, hogy $f(x)$-nek van nem egész racionális együtthatója. Legyen

$$f(x)=\frac{b_q}{c_q}x^q+\ldots+\frac{b_1}{c_1}x+\frac{b_0}{c_0},$$

ahol $b_0, c_0, b_1, c_1, b_2, c_2, \ldots$ egészek, valamint b_i és $c_i \neq 0$ relatív prímek bármilyen i-re. Legyen n olyan pozitív egész, amelynek 10-es számrendszerbeli alakja 1-re végződik. Ekkor $8n$ biztosan 8-ra, $5n$ pedig 5-re végződik, vagyis $f(8n)$ és $f(5n)$ is egész.

Két 6-ra végződő szám szorzata is 6-ra végződik, egy 6-ra és egy 8-ra végződő szám szorzata pedig 8-ra. Így 16^m minden m pozitív egészre 6-ra végződik. Ezért $16^m \cdot 8$ is 8-ra végződik, tehát $f(16^m \cdot 8n) = f(2^{4m+3} \cdot n)$ egész. Az 5 hatványai mindig 5-re végződnek, ezért $f(5^m \cdot n)$ is egész.

Tekintsük a $c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot \ldots \cdot c_q$ szorzatot, és osszuk el a legnagyobb 2-hatvány osztójával, majd a legnagyobb 5-hatvány osztójával is. Az így kapott páratlan, 5-tel nem osztható egész számot jelölje A, azaz

$$c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_q = A \cdot 2^e \cdot 5^f.$$

Az A-t bármelyik együttható nevezőjével (c_i-vel) osztva olyan törtet kapunk, amelynek egyszerűsített nevezője csak 2-vel vagy 5-tel osztható a prímek közül, vagy a kapott hányados egész.

Az A utolsó számjegyétől függően adjuk meg a t egészet a következőképpen: Ha ez a számjegy 1, akkor legyen $t = A$. Ha 3, akkor $7A$ 1-re végződik, így legyen $t = 7A$. Ha 7, akkor legyen $t = 3A$. Ha 9, akkor pedig legyen $t = 9A$. Így t mindenképpen 1-re végződik, és t/c_i vagy egész vagy olyan tört, amelynek a nevezője nem osztható 2-től és 5-től különböző prímmel.

A fentiek alapján $f(2^{4e+3} \cdot t)$ egész. Vizsgáljuk ennek az összegnek egy, $\dfrac{b_0}{c_0}$-tól különböző

$$\frac{b_i \cdot 2^{i\cdot(4e+3)} \cdot t^i}{c_i}$$

tagját. A tört egyszerűsítése után a nevezőben csak 5-hatvány maradhat, mivel c_i legfeljebb 2^e-nel osztható. Így $f(2^{4e+3} \cdot t) - f(0)$ olyan törtek összege, amelyek nevezőjében 5-hatványok állnak. Mivel $f(2^{4e+3} \cdot t)$ egész, azért $f(0)$ is vagy egész, vagy olyan tört, amelynek nevezője 5-hatvány.

$f(5^f \cdot t)$ is egész a fentiek alapján. Vizsgáljuk ennek az összegnek is egy, $\dfrac{b_0}{c_0}$-tól különböző

$$\frac{b_i \cdot 5^{if} \cdot t^i}{c_i}$$

tagját. Az egyszerűsítés után a nevezőben itt csak 2-hatvány maradhat, mivel c_i legfeljebb 5^f-nel osztható. Tehát $f(5^f \cdot t) - f(0)$ olyan törtek összege, amelyek nevezőjében 2-hatvány áll. Mivel $f(5^f \cdot t)$ egész, $f(0)$ is egész vagy olyan tört, aminek nevezője 2-hatvány.

A két eredményt összevetve $f(0)$ szükségképpen egész.

b) Az $f(x) = \dfrac{(x-5)(x-8)}{10}$ polinom teljesíti a feladat feltételeit: ha $a = 10k+5$ vagy $b = 10k+8$ alakú szám, ahol k (nemnegatív) egész, akkor $f(a) = k(10k-3)$ és $f(b) = (10k+3)k$ egészek, viszont $f(1) = \dfrac{28}{10}$ nem egész.

Póta Balázs (Győr, Révai Miklós Gimn., 11. évf.) és
Schrettner Jakab (Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, 11. évf.) megoldását felhasználva

Megjegyzés. Az *interpoláció* tétele szerint, ha $a_1, \ldots, a_{n+1}$ páronként különböző, $b_1, \ldots, b_{n+1}$ pedig tetszőleges valós számok, akkor létezik pontosan egy olyan legfeljebb n-edfokú $f(x)$ polinom, amelyre $f(a_k) = b_k$ minden $k = 1, \ldots, n+1$-re. Világos, hogy két különböző $f_1(x)$ és $f_2(x)$ polinom nem létezhet ezekkel a tulajdonságokkal, hiszen akkor a különbségük olyan, legfeljebb n-edfokú, nem azonosan nulla polinom lenne, amelynek az $a_1, \ldots, a_{n+1}$ számok mindegyike gyöke. Ez azonban lehetetlen, mivel egy nemnulla polinomnak legfeljebb annyi gyöke lehet, mint a polinom foka.

Másrészt legyen

$$f(x) = b_1 L_1(x) + \ldots + b_{n+1} L_{n+1}(x),$$

ahol mindegyik

$$L_k(x) = \frac{\prod\limits_{j:j\neq k} (x - a_j)}{\prod\limits_{j:j\neq k} (a_k - a_j)}$$

n-edfokú polinom a_k-ban 1-et, az összes többi a_j-ben pedig nullát vesz fel. Az így előállított $f(x)$ polinom tehát megfelelő. Az $f(x)$ eme alakjából látszik, hogy az együtthatói az a_k, b_k számokból véges sok összeadás, kivonás, szorzás és osztás alkalmazásával kaphatók meg; ebből speciálisan következik, hogy ha az a_k, b_k számok valamennyien racionálisak, akkor $f(x)$ együtthatói is azok.

A feladatban szereplő polinom fokát jelölje d. Az interpoláció tételét alkalmazhatjuk $n = d$-re, $a_k = 5^k$-ra és $b_k = f(5^k)$-ra, ahol $k = 1, \ldots, d+1$; ezek a számok egészek lévén racionálisak, ezért az általuk egyértelműen meghatározott $f(x)$ együtthatói is azok.

Póta Balázs (Győr, Révai Miklós Gimn., 11. évf.) és
Schrettner Jakab (Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, 11. évf.)
megoldását felhasználva